

## ROTAZIONI

**Teorema del 'punto fisso' di Eulero:**

"Lo spostamento più generale di un corpo rigido con un punto fisso è equivalente ad una rotazione attorno ad un asse che passa per quel punto."

Prendendo la zolla come corpo rigido ed il centro della Terra come punto fisso:

Ogni spostamento da una posizione all'altra nella superficie terrestre può essere ritenuta come una rotazione attorno ad un asse appropriato passante per il centro della Terra.

"L'asse appropriato" passante per il centro della Terra è detto **asse di rotazione** ed interseca la superficie terrestre in due punti detti **poli di rotazione**.

L'intensità della velocità angolare attorno all'asse definisce l'intensità del moto relativo tra due zolle.

**Convenzione:** una rotazione è **positiva**, se - vista dall'esterno della Terra, è antioraria.

Perbacco uno dei due poli di rotazione è positivo, l'altro è negativo.

In un punto  $X$  sulla superficie terrestre, la velocità  $v$  tra due zolle sarà

$$v = \omega R \sin \theta$$

con  $\theta$  distanza angolare tra il polo di rotazione  $P$  ed il punto  $X$  ( $R$  = raggio terrestre).



Ai poli la velocità relativa è zero, mentre è massima  $v = \omega R$  ad una distanza di  $90^\circ$  dai poli di rotazione.

Il moto relativo tra due zolle varia al variare della posizione lungo le loro margine comune - a differenza dei precedenti esempi riguardanti la Terra fissa!

Le linee di velocità costante sono dei **piccoli cerchi** attorno ai poli di rotazione, definiti da  $\theta = \text{cost.}$

NB. Una rotazione con grande velocità angolare  $\omega$  non significa necessariamente che il moto relativo lungo un margine di zolla è grande, poiché è importante anche la distanza del punto in considerazione dal polo di rotazione.

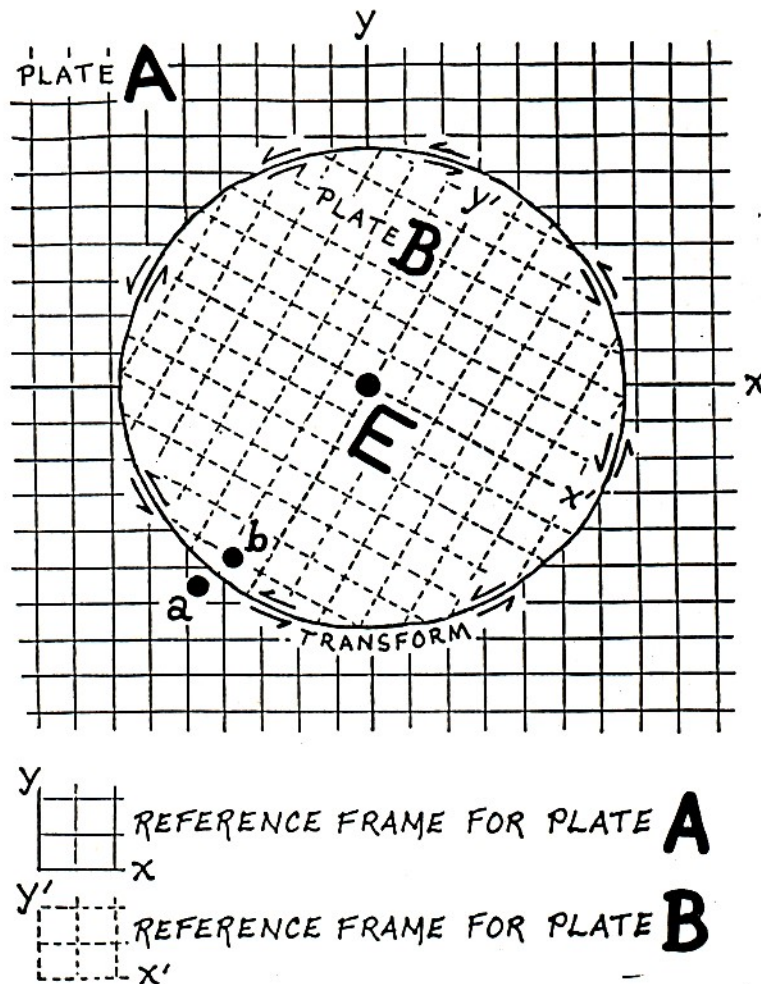
**Convenzione:** nel citare la velocità relativa tra due zolle si cita la velocità relativa a  $\theta = 90^\circ$  (anche se nessuna delle due zolle si estende a quella distanza!)

L'intersezione della Terra con un piano passante per il suo centro è un circolo che viene definito **grande cerchio**.



## POLO DI EULERO

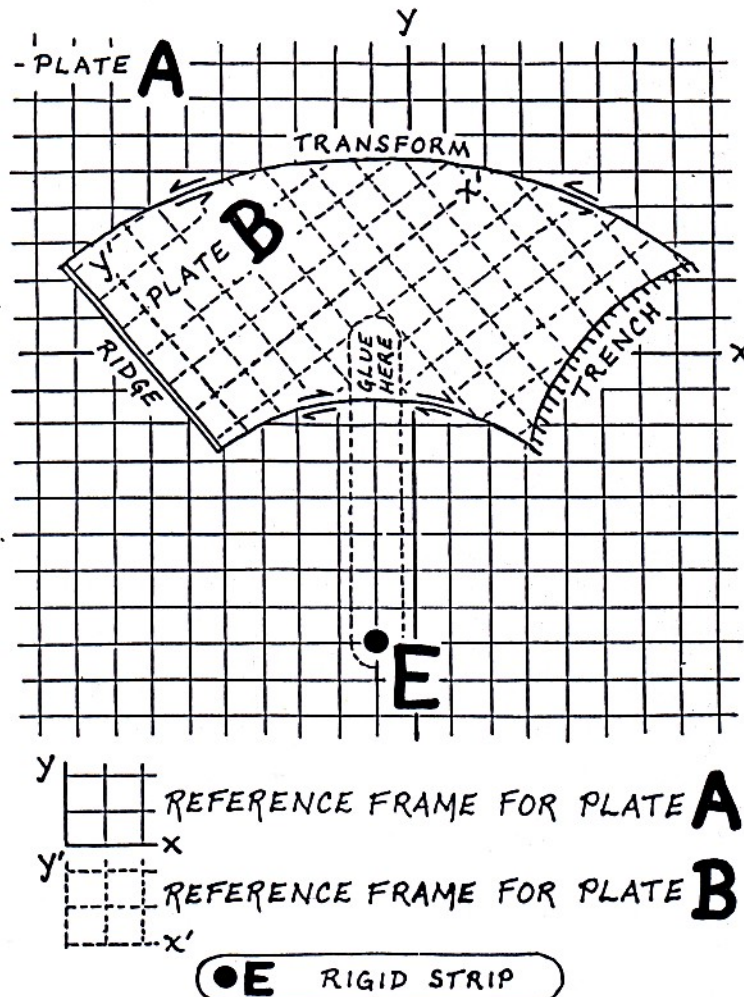
Box 1-2. A Circular Plate.



1. Copy figure and cut out plate B along the circle.
2. Place a pin through E to form an Euler pole.
3. Rotate plate B clockwise, keeping plate A fixed.
4. Note that the entire boundary of plate B is a left-lateral transform fault.
5. Note that the Euler pole E is the only point that keeps the same coordinates in both reference frames as plate B rotates.

Il polo di Euler è il punto di perno per il moto relativo delle due zolle!

**Box 1-3. Plate with Arcs as Transforms.**

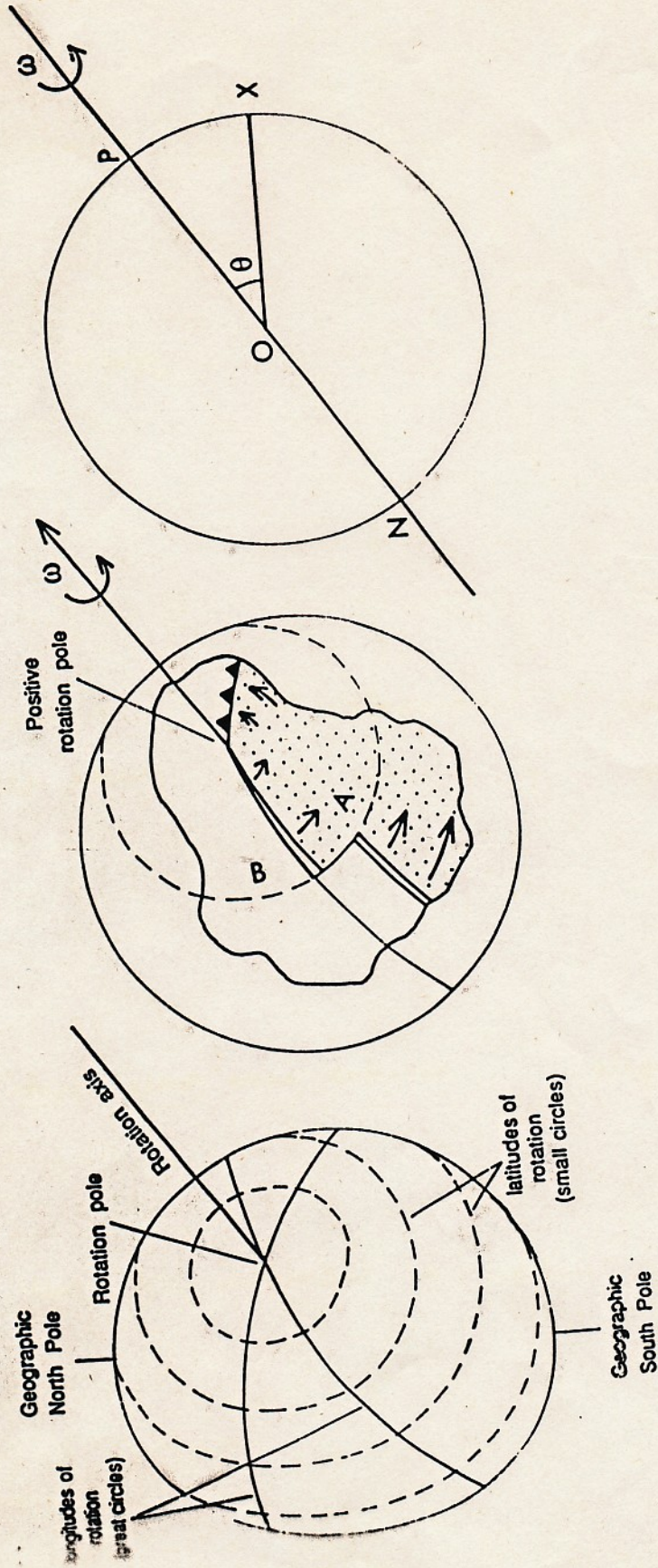


1. Copy figure and cut along boundary of plate B.
2. Cut out lower RIGID STRIP and glue to plate B as shown.
3. Place pin through E to form Euler pole.
4. Rotate plate B clockwise, slipping leading edge beneath plate A.
5. Note which parts of the boundary are ridges, which parts are trenches, and which parts are transforms.
6. Note that as plate B rotates, the coordinates of E remain the same in both the coordinate system (or reference frame) of plate A and also in the coordinate system of plate B.

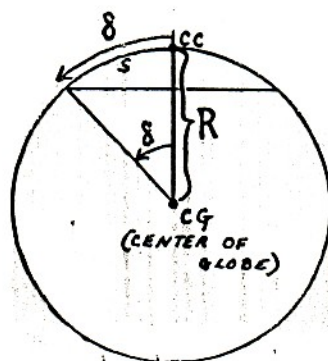
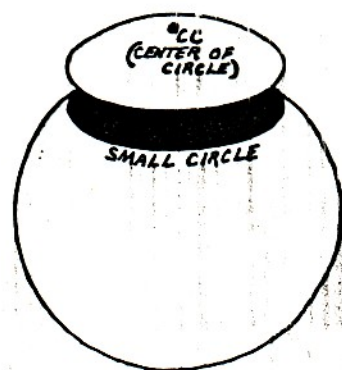
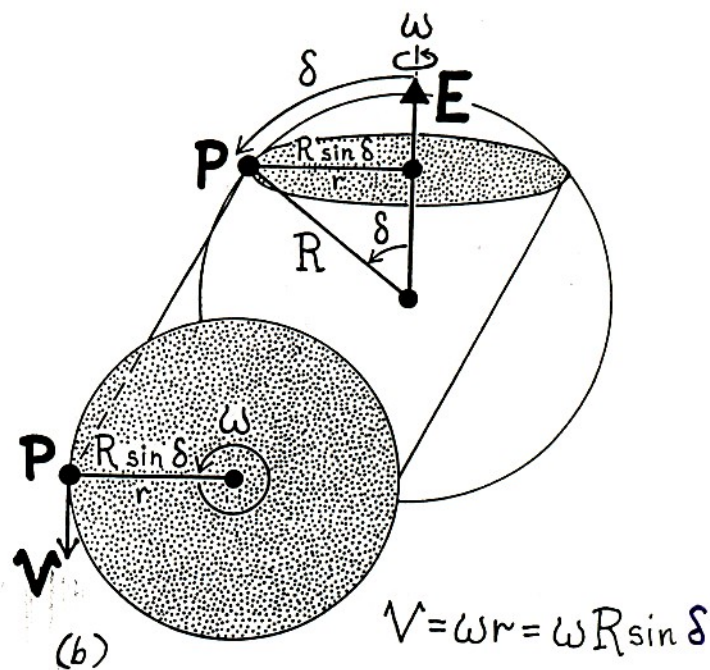
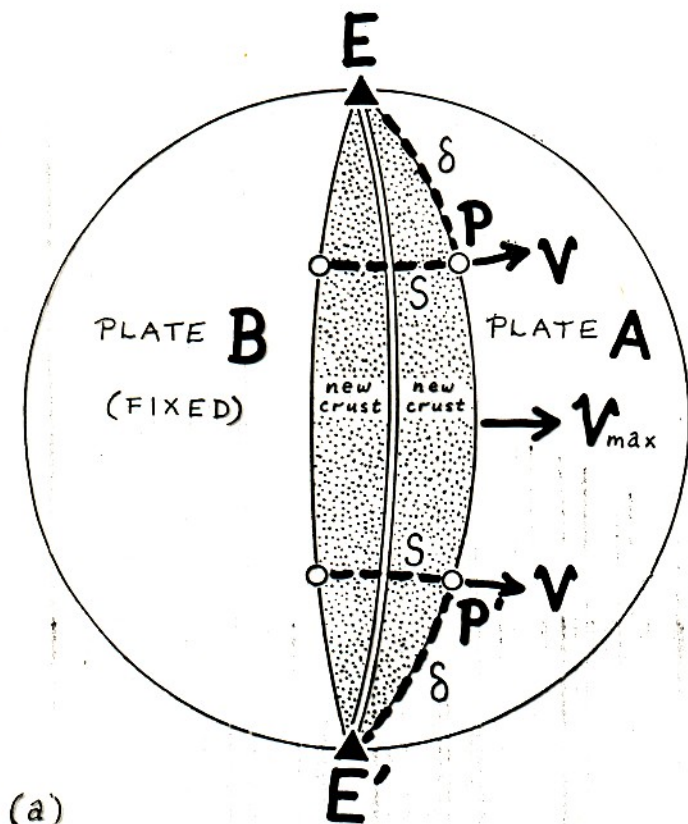
se polo di Eulero è l'unico punto che rimane fisso  
rispetto ad ambedue le folle (nei due sistemi di riferimento)!



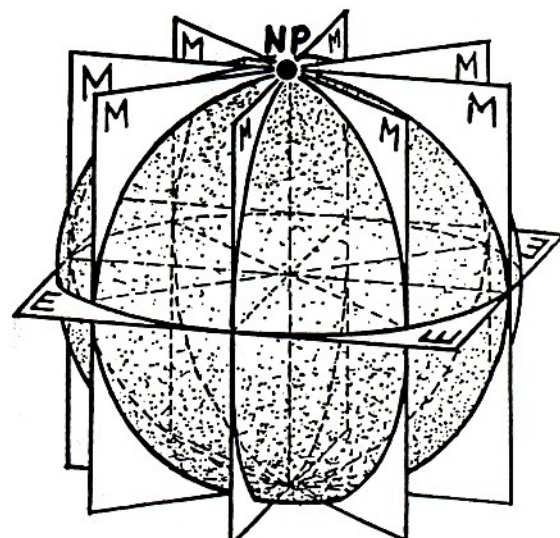
# POLO DI EULERO







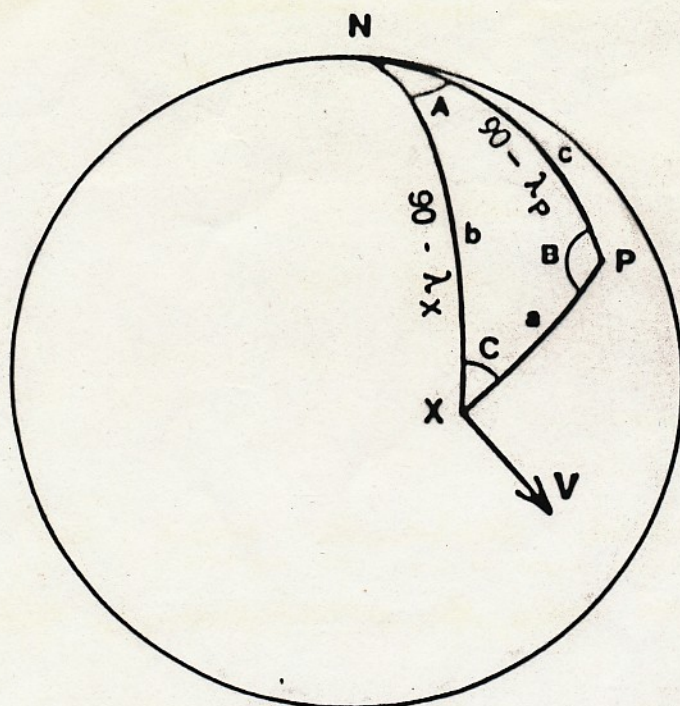
PICCOLO CERCHIO



GRANDE CERCHIO



# CALCOLO DEL MOTO RELATIVO IN UN PUNTO SUL MARGINE DI ZOLLA



- N polo Nord
- P polo di rotazione positivo
- X punto sul margine di zolla

Consideriamo il triangolo  $NXP$  le distanze angolari di due lati  $b$  e  $c$  sono note, quella del lato  $a$  no.

$$b = 90 - \lambda_x$$

$$c = 90 - \lambda_p$$

E' noto l'angolo  $A$ , mentre non sono noti  $B$  e  $C$

$$A = \phi_p - \phi_x$$

L'azimut del vettore di velocità  $\underline{v}$  nel punto  $X$  è dato da

$$\beta = 90 + \underline{C}$$

Inoltre

$$\underline{v} = \omega R \sin \underline{a}$$

Per determinare gli angoli  $a$  e  $C$  usiamo la geometria sferica!



## Leggi del seno e del coseno in geometria sferica

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

---

Avremo pertanto

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos(90 - \lambda_x) \cos(90 - \lambda_p) + \\ &\quad + \sin(90 - \lambda_x) \sin(90 - \lambda_p) \cos(\phi_p - \phi_x)\end{aligned}$$

da cui:

$$* \quad a = \cos^{-1} [\sin \lambda_x \sin \lambda_p + \cos \lambda_x \cos \lambda_p \cos(\phi_p - \phi_x)]$$

Inoltre da

$$\frac{\sin a}{\sin(\phi_p - \phi_x)} = \frac{\sin(90 - \lambda_p)}{\sin C}$$

otteniamo

$$* \quad C = \sin^{-1} \left[ \frac{\cos \lambda_p \sin(\phi_p - \phi_x)}{\sin a} \right]$$

NB: la funzione  $\sin^{-1}$  è a due valori. Verificare il valore corretto!



## SIMBOLOGIA

$\lambda_P$	latitudine del polo di rotazione P	}	N	positivo
$\lambda_X$	latitudine del punto X sul margine di zolla		S	negativo
$\phi_P$	longitudine del polo di rotazione P		E	positivo
$\phi_X$	longitudine del punto X sul margine di zolla		W	negativo
$\underline{v}$	Velocità del punto X sul margine di zolla			
$v$	Intensità della velocità			
$\beta$	Aziमत del vettore di velocità rispetto al nord N	}	Positivo	orario
$R$	Raggio terrestre			
$\omega$	Velocità angolare rispetto al polo di rotazione P			



## PROBLEMA

### Calcolo del moto relativo sul margine di zolla

Calcolare il moto relativo odierno nel punto  $28^{\circ}\text{S } 71^{\circ}\text{W}$  sulla zona di subduzione Perù-Cile usando il polo di rotazione tra le zolle di Nazca ed Sud America ( $56^{\circ}\text{N}$ ,  $94^{\circ}\text{W}$ ,  $7.6 \times 10^{-7} \text{ deg/a}$ ;  $R = 6371 \text{ km}$ )

$$\begin{array}{ll} \lambda_x = -28^{\circ} & \phi_x = -71^{\circ} \\ \lambda_p = 56^{\circ} & \phi_p = -94^{\circ} \end{array}$$

$$\omega = 7.6 \times 10^{-7} \text{ deg/a} = \frac{\pi}{180} \times 7.6 \times 10^{-7} \text{ rad/a}$$

$$\begin{aligned} a &= \cos^{-1} [\sin(-28) \sin(56) + \cos(-28) \cos(56) \cos(-94+71)] \\ &= 86.26^{\circ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \sin^{-1} [\cos(56) \sin(-94+71) / \sin(86.26)] \\ &= -12.65^{\circ} \end{aligned}$$

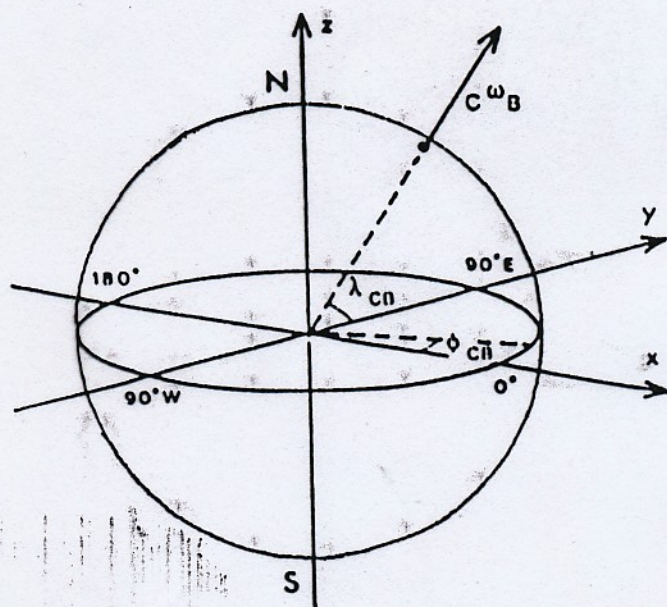
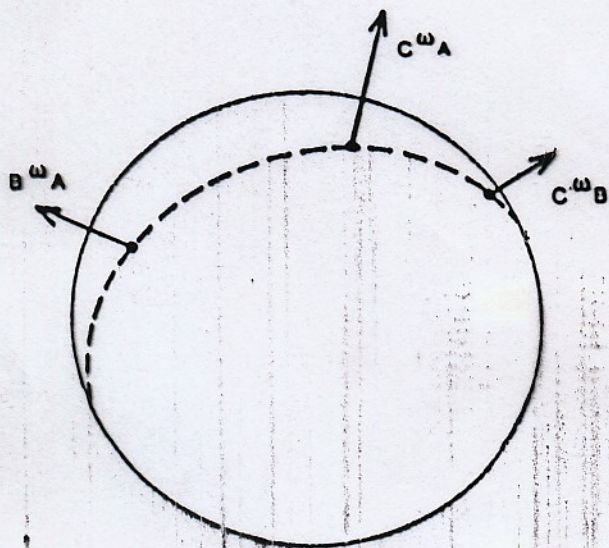
$$\begin{aligned} v &= \frac{\pi}{180} \times 7.6 \times 10^{-7} \times 6371 \times 10^5 \times \sin(86.26) \text{ cm/a} \\ &= 8.43 \text{ cm/a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta &= 90^{\circ} - 12.65^{\circ} \\ &= 77.35^{\circ} \end{aligned}$$

La zolla di Nazca si muove relativamente a quella del Sud America con velocità di  $8.4 \text{ cm/a}$  ed azimuth  $77^{\circ}$  nel punto considerato. La zolla del Sud America si muove relativamente a quella di Nazca con velocità  $8.4 \text{ cm/a}$  ed azimuth  $257^{\circ}$  nel punto considerato.



## SOMMA DI VETTORI ROTAZIONE



Supponiamo di conoscere  $\underline{B\omega_A}$  e  $\underline{C\omega_B}$ . La velocità angolare  $\underline{C\omega_A}$  può essere determinata con la somma vettoriale (come per la terna piatta)

$$\underline{C\omega_A} = \underline{C\omega_B} + \underline{B\omega_A} \quad (*)$$

ovvero

$$\underline{A\omega_B} + \underline{B\omega_C} + \underline{C\omega_A} = 0$$

Il vettore risultante  $\underline{C\omega_A}$  giace nello stesso piano dei due vettori originali  $\underline{B\omega_A}$  e  $\underline{C\omega_B}$ . Se consideriamo il grande cerchio passante per  $\underline{B\omega_A}$  e  $\underline{C\omega_B}$ , pure  $\underline{C\omega_A}$  si troverà in di esso.

NB: la relazione è valida solo per velocità angolari o movimenti **infinitesimi**!

Prendendo il sistema di riferimento in alto a destra possiamo esprimere la (\*) come

$$x_{CA} = x_{CB} + x_{BA}$$

$$y_{CA} = y_{CB} + y_{BA}$$

$$z_{CA} = z_{CB} + z_{BA}$$



## NOTAZIONE PER LA SOMMA DI ROTAZIONI

Vettore rotazione	Intensità	latitudine del polo	longitudine del polo
$\underline{B\omega}_A$	$B\omega_A$	$\lambda_{BA}$	$\phi_{BA}$
$\underline{C\omega}_B$	$C\omega_B$	$\lambda_{CB}$	$\phi_{CB}$
$\underline{C\omega}_A$	$C\omega_A$	$\lambda_{CA}$	$\phi_{CA}$

---

Per cui possiamo esprimere le componenti cartesiane del vettore somma con

$$X_{CA} = C\omega_B \cos \lambda_{CB} \cos \phi_{CB} + B\omega_A \cos \lambda_{BA} \cos \phi_{BA}$$

$$Y_{CA} = C\omega_B \cos \lambda_{CB} \sin \phi_{CB} + B\omega_A \cos \lambda_{BA} \sin \phi_{BA}$$

$$Z_{CA} = C\omega_B \sin \lambda_{CB} + B\omega_A \sin \lambda_{BA}$$

L'intensità del vettore risultante sarà

$$C\omega_A = \sqrt{X_{CA}^2 + Y_{CA}^2 + Z_{CA}^2}$$

mentre la posizione del polo è data da

$$\lambda_{CA} = \sin^{-1} \left[ \frac{Z_{CA}}{C\omega_A} \right]$$

$$\phi_{CA} = \tan^{-1} \left[ \frac{Y_{CA}}{X_{CA}} \right]$$

NB. L'espressione per  $\phi_{CA}$  ha un'ambiguità di  $180^\circ$  ( $\tan \theta = \tan(\theta + 180^\circ)$ ), per cui si deve sommare o sottrarre  $180^\circ$  a seconda

$$X_{CA} > 0$$

$$X_{CA} < 0$$

$$-90^\circ < \phi_{CA} < +90^\circ$$

$$|\phi_{CA}| > 90^\circ$$



**Table 2.1. Rotation vectors for the present-day relative motion between some pairs of plates**

Plates	Positive pole position		Angular velocity
	Latitude	Longitude	( $10^{-7}$ deg yr $^{-1}$ )
Africa-Antarctica	5.6°N	39.2°W	1.3
Africa-Eurasia	21.0°N	20.6°W	1.3
Africa-North America	78.8°N	38.3°E	2.5
Africa-South America	62.5°N	39.4°W	3.2
Australia-Antarctica	13.2°N	38.2°E	6.8
Pacific-Antarctica	64.3°S	96.0°E	9.1
South America-Antarctica	86.4°S	139.3°E	2.7
Arabia-Eurasia	24.6°N	13.7°E	5.2
India-Eurasia	24.4°N	17.7°E	5.3
Eurasia-North America	62.4°N	135.8°E	2.2
Eurasia-Pacific	61.1°N	85.8°W	9.0
Pacific-Australia	60.1°S	178.3°W	11.2
North America-Pacific	48.7°N	78.2°W	7.8
Cocos-North America	27.9°N	120.7°W	14.2
Nazca-Pacific	55.6°N	90.1°W	14.2
Nazca-South America	56.0°N	94.0°W	7.6

*Note:* The first plate moves anticlockwise with respect to the second plate as shown.

*Source:* After DeMets, Gordon, Argus and Stein, *C. J. I.*, 101, 425-478.



## PROBLEMA

### Somma di vettori rotazione relativa

Data la seguente tabella di vettori di rotazione istantanea tra le zolle di Nazca e Pacifico e tra le zolle del Pacifico e Antartide, calcolare il vettore di rotazione istantanea tra le zolle di Nazca e Antartide.

Zolla	Vettore di rotazione	latitudine del polo	longitudine del polo	Velocità angolare ( $10^{-7}$ deg/a)
Nazca-Pacifico	$P \omega_N$	$55.6^\circ N$	$90.1^\circ W$	14.2
Pacifico-Antartide	$A \omega_P$	$64.3^\circ S$	$96.0^\circ E$	9.1

$$\underline{A \omega_N} = \underline{A \omega_P} + \underline{P \omega_N}$$

$$\begin{aligned} X_{AN} &= 9.1 \cos(-64.3) \cos(96.0) + 14.2 \cos(55.6) \cos(-90.1) \\ &= -0.427 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{AN} &= 9.1 \cos(-64.3) \sin(96.0) + 14.2 \cos(55.6) \sin(-90.1) \\ &= -4.098 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{AN} &= 9.1 \sin(-64.3) + 14.2 \sin(55.6) \\ &= -3.517 \end{aligned}$$

$$A \omega_N = \sqrt{0.427^2 + 4.098^2 + 3.517^2} = 5.417$$

$$\lambda_{AN} = \sin^{-1} [3.517/5.417] = 40.49^\circ$$

$$\phi_{AN} = \tan^{-1} [-4.098/-0.427] = 84.05^\circ + 180$$

la rotazione richiesta ha intensità  $5.4 \times 10^{-7}$  deg/a ed il relativo polo di rotazione si trova a  $40.5^\circ N$ ,  $95.9^\circ W$ .



## DETERMINAZIONE DEI POLI E DEI VETTORI DI ROTAZIONE

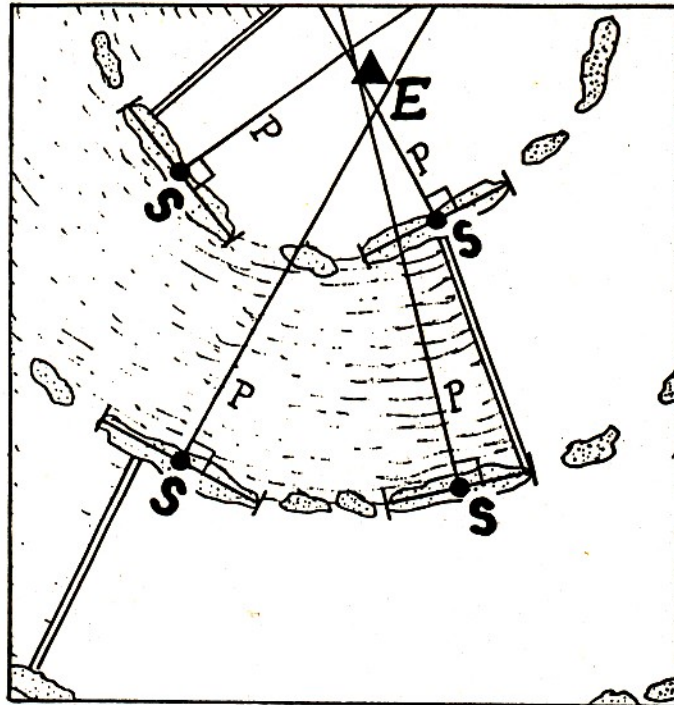
I poli ed i vettori istantanei (in termini geologici) di rotazione odierni si possono determinare con vari metodi:

1. Determinazione locale della direzione del moto relativo dalla **direzione delle faglie trasformi attive** (posizione del polo di Eulero, usato principalmente per le dorsali oceaniche)
2. Il tasso di espansione dei fondali oceanici varia con il seno della distanza angolare  $\theta$  dal polo di rotazione. Il polo di rotazione e la velocità angolare possono determinarsi da **tassi di espansione a varie località lungo una dorsale**.
3. I **meccanismi focali dei terremoti** lungo un margine possono dare informazioni sulla direzione del moto relativo tra le due zolle.
4. Se un margine attraversa ea tiene ferme, il moto relativo può essere appurato da **misure geodetiche** (spostamenti).
5. I moti relativi tra le zolle possono essere misurati accuratamente con **sistemi a puntamento laser con satelliti** oppure con **interferometria a base molto grande (VLBI)** che usa i quasar come sorgenti e radio telescopi come ricevitori.



## Determinazione del polo di Eulero mediante le zone di frattura

**Box 1-4.** Finding Euler Pole from Fracture Zones.



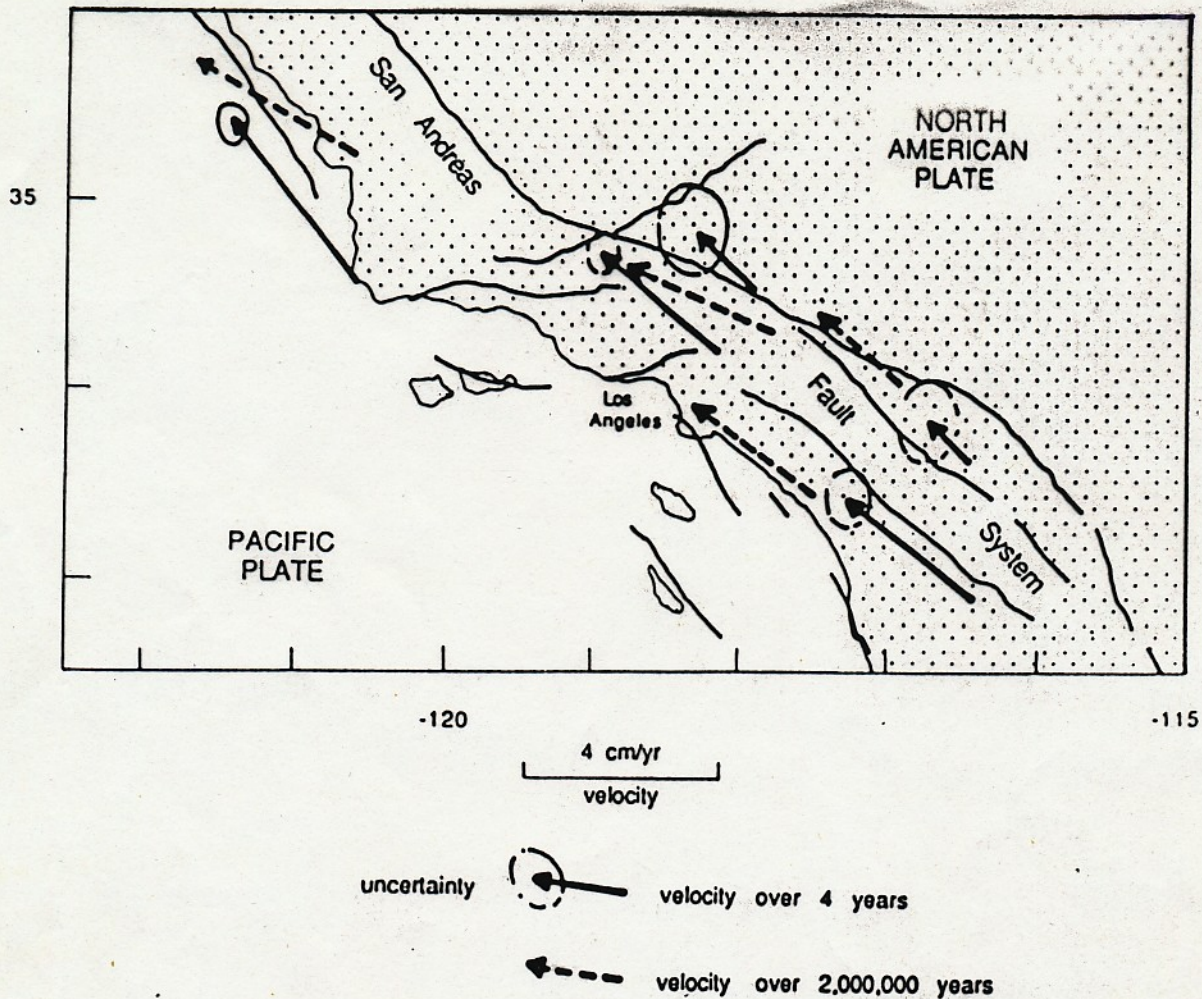
FRACTURE ZONES



BEST FIT EULER POLE

1. Identify local linear geologic features.
2. Draw a straight line segment S through each feature.
3. Construct the perpendicular bisector P of each segment.
4. Eyeball the point E that is as close as possible to all bisectors P. This is the Euler pole.





Velocità della zolla pacifica relativamente alla zolla nordamericana lungo il sistema di faglie San Andreas in California.



velocità determinate mediante dati VLBI su un arco di 4 anni



velocità determinate geologicamente



## MOTI ASSOLUTI DELLE ZOLLE

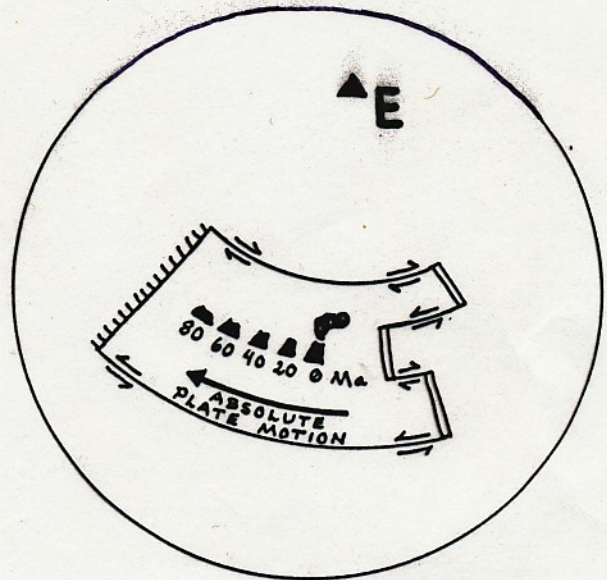
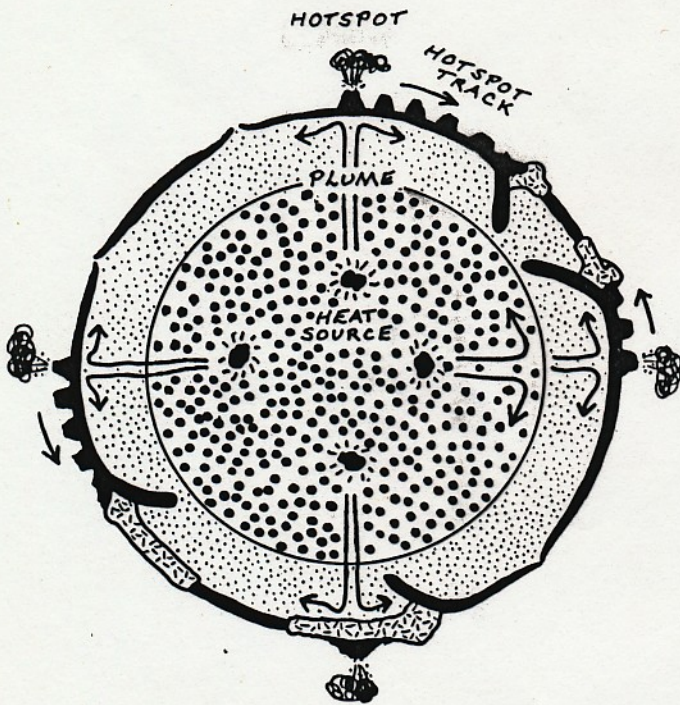
Finora si è discusso dei moti relativi tra le zolle.

Per determinare le velocità assolute abbiamo bisogno di un **sistema di riferimento fisso**.

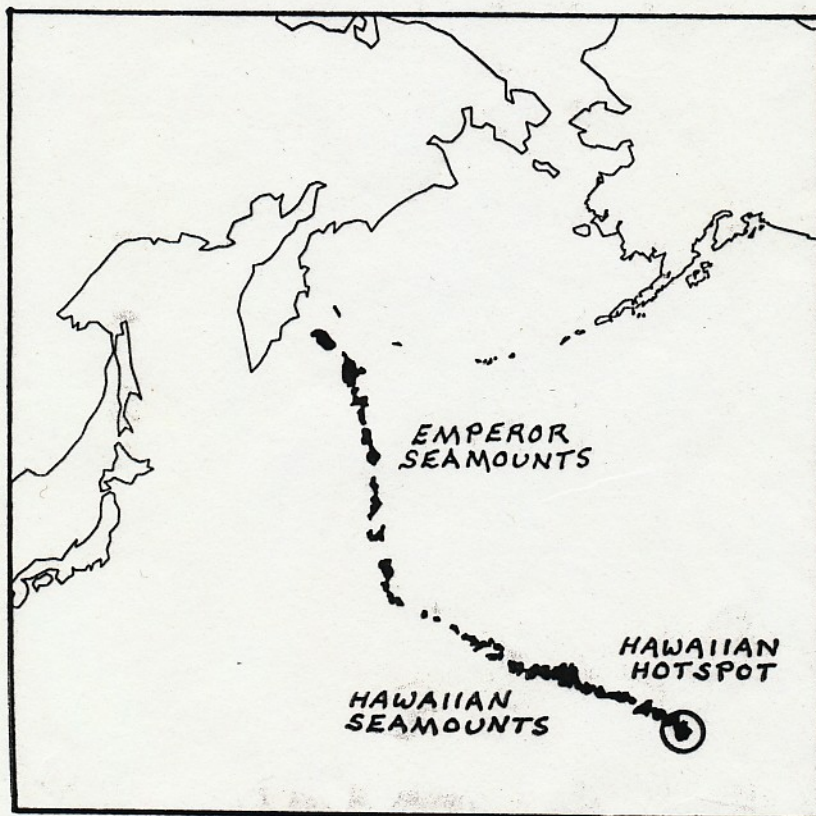
1. Un modo di determinare le velocità assolute è di supporre che la **mesosfera** (parte del mantello terrestre sotto l'astenosfera) sia **quasi immobile** e di fissare il sistema di riferimento in di essa.
2. Un secondo modo è di trovare un sistema di riferimento tale che il **momento totale** esercitato dalle zolle **sulla mesosfera** sia nullo.



## PUNTI CALDI



Fuori di calore radiativo nella mantosfera producono una traccia di punti caldi sulle zolle in movimento (serie di coni vulcanici).

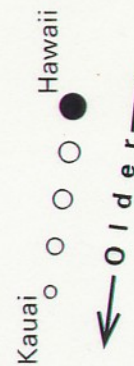
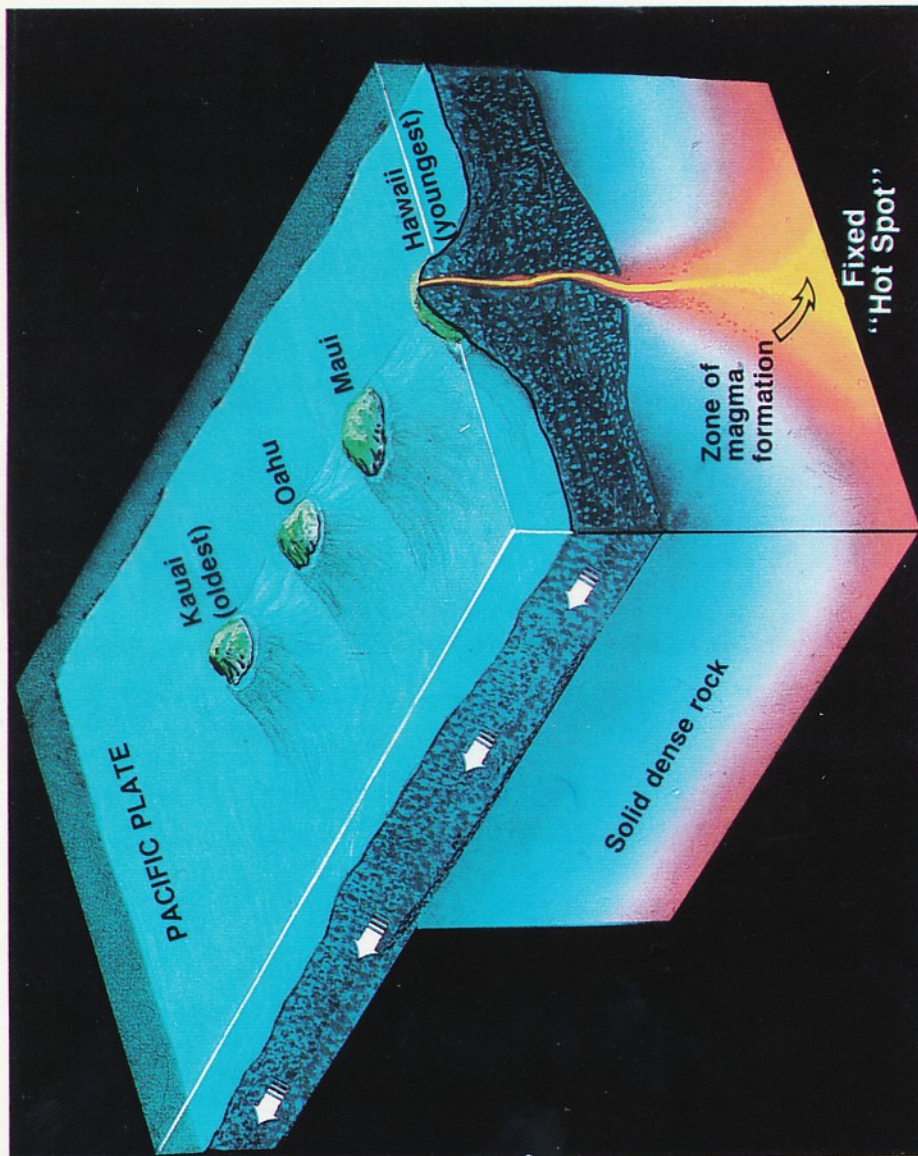


Le catene di montagne marine Imperatore e Hawaii sono la traccia di un punto caldo.



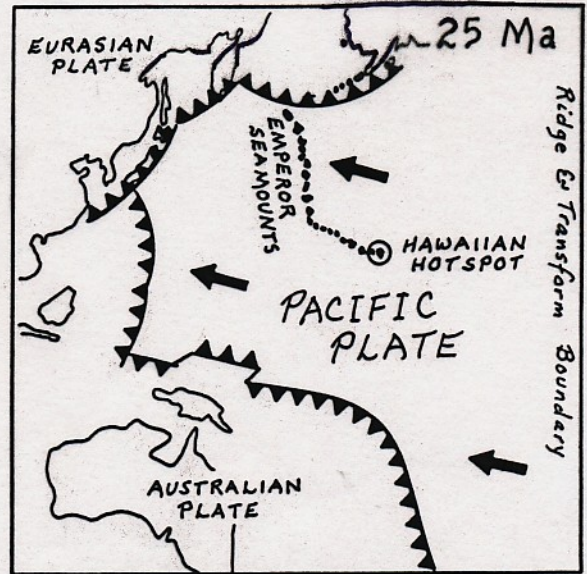
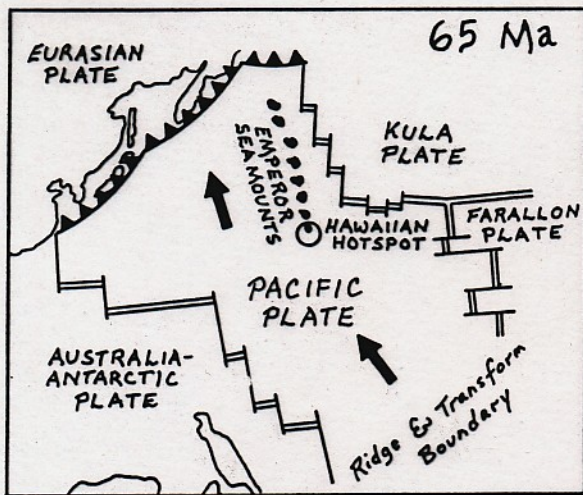
forming an active seamount. Over time, countless eruptions cause the seamount to grow until it finally emerges above sea level to form an island volcano. Wilson suggested that continuing plate movement eventually carries the island beyond the hotspot, cutting it off from the magma source, and volcanism ceases. As one island volcano becomes extinct, another develops over the hotspot, and the cycle is repeated. This process of volcano growth and death, over many millions of years, has left a long trail of volcanic islands and seamounts across the Pacific Ocean floor.

According to Wilson's hotspot theory, the volcanoes of the Hawaiian chain should get progressively older and become more eroded the farther they travel beyond the hotspot. The oldest volcanic rocks on Kauai, the northwesternmost inhabited Hawaiian island, are about 5.5 million years old and are deeply eroded. By comparison, on the "Big Island" of Hawaii—southeasternmost in the chain and presumably still positioned over the hotspot—the oldest exposed rocks are less than 0.7 million years old and new volcanic rock is continually being formed.

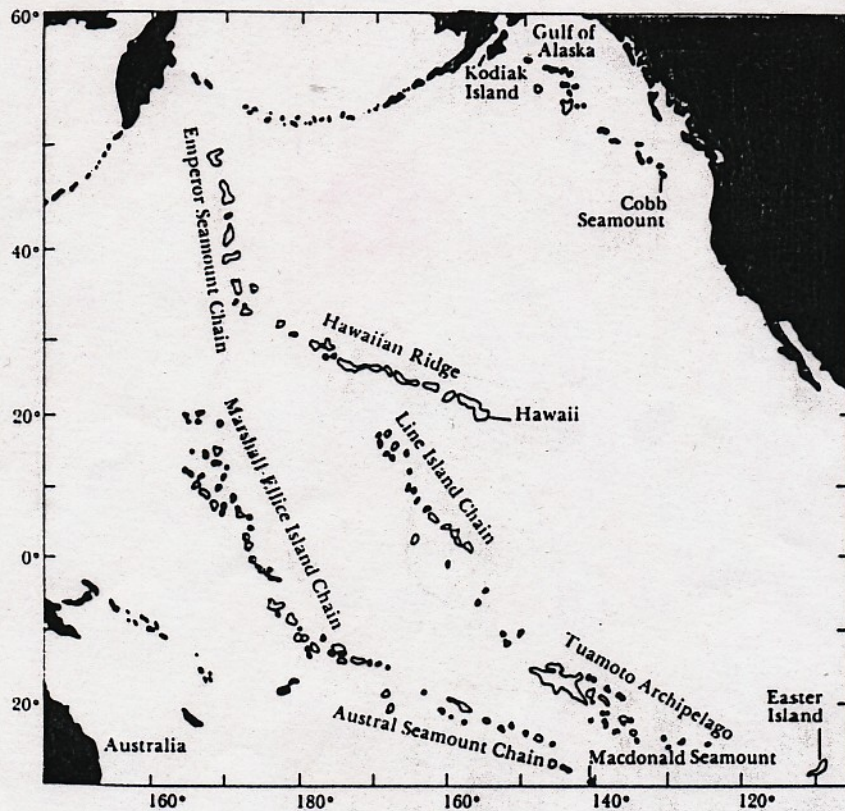


Above: Artist's conception of the movement of the Pacific Plate over the fixed Hawaiian "Hot Spot," illustrating the formation of the Hawaiian Ridge-Emperor Seamount Chain. (Modified from a drawing provided by Maurice Krafft, Centre de Volcanologie, France). Left: J. Tuzo Wilson's original diagram (slightly modified), published in 1963, to show his proposed origin of the Hawaiian Islands. (Reproduced with permission of the Canadian Journal of Physics.)



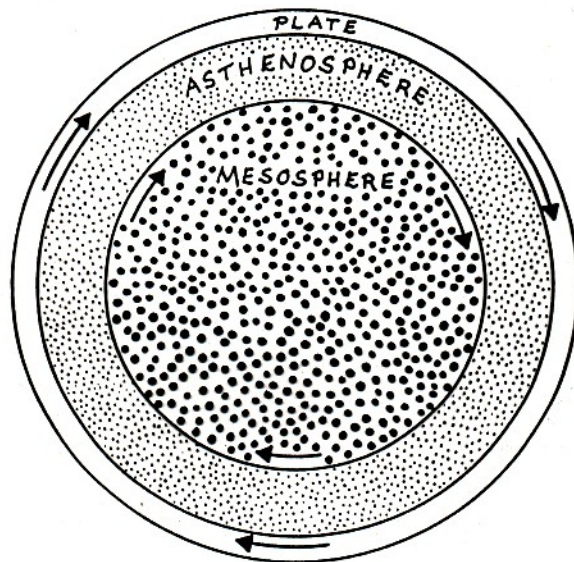


Ricostruzione del moto della zolla del Pacifico usando il punto caldo alle Hawaii.



catene vulcaniche dell'Oceano Pacifico.





Supponiamo il pianeta A abbia una sola zolla accoppiata attraverso l'astenosfera alla mesosfera rigida. Se conosciamo il moto della zolla, chi si può dire del moto della mesosfera?

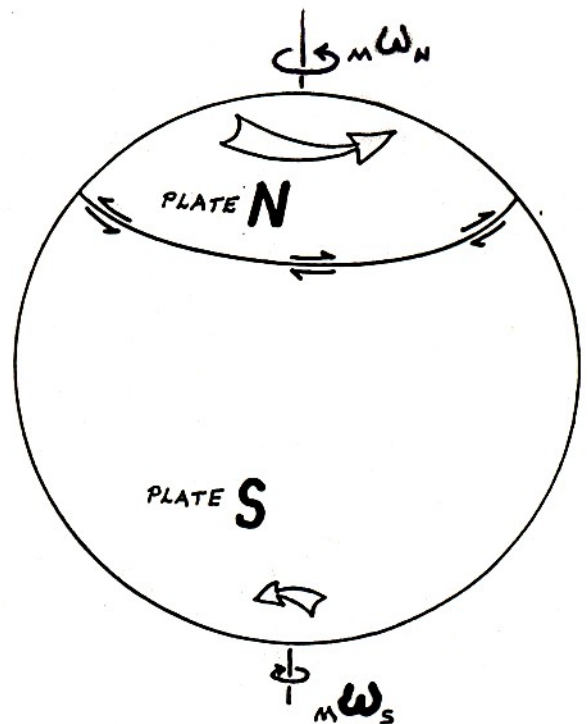
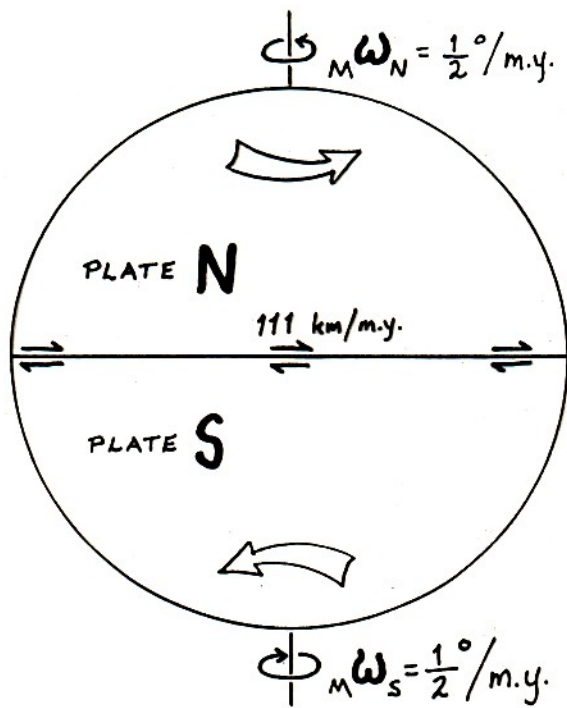
Il momento esercitato dalla litosfera nella mesosfera sarà

$$\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F}$$

con  $\underline{r}$  vettore di posizione ed  $\underline{F}$  la forza di trascinamento per unità di area  $\underline{F} = \mu_L \underline{v}$  ( $\underline{v}$  velocità della litosfera e  $\mu_L$  coefficiente di trascinamento).

Il momento totale è dato dall'integrale di  $\underline{M}$  su tutta la superficie e risulta parallelo al vettore di rotazione angolare  $\omega_L$ . Se la velocità della mesosfera è diversa da quella della litosfera, la forza di trascinamento la porterà alla stessa velocità **ed il momento totale alla fine sarà nullo.**



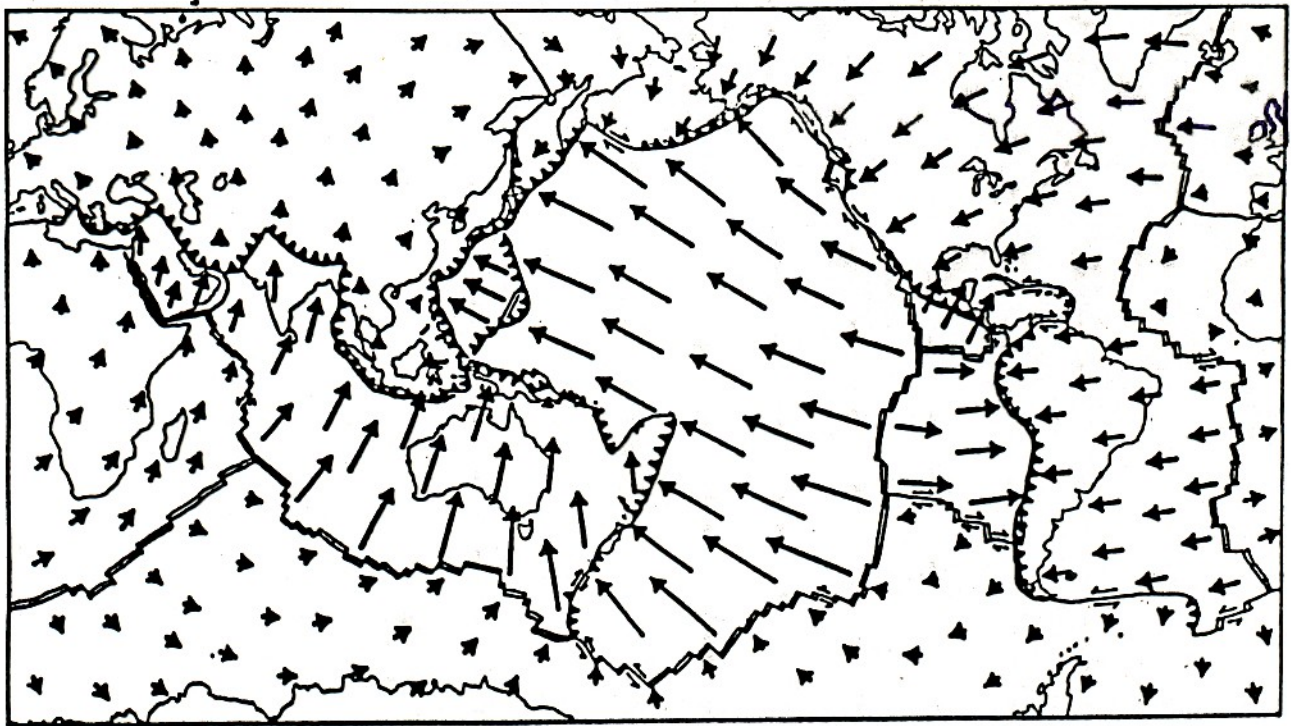


Nel caso il pianeta abbia due calotte emisferiche il momento totale esercitato sulla mesosfera sarà la somma dei due momenti esercitati dalle due calotte. Affinchè la somma sia zero, i due momenti devono essere **uguali ed opposti**.

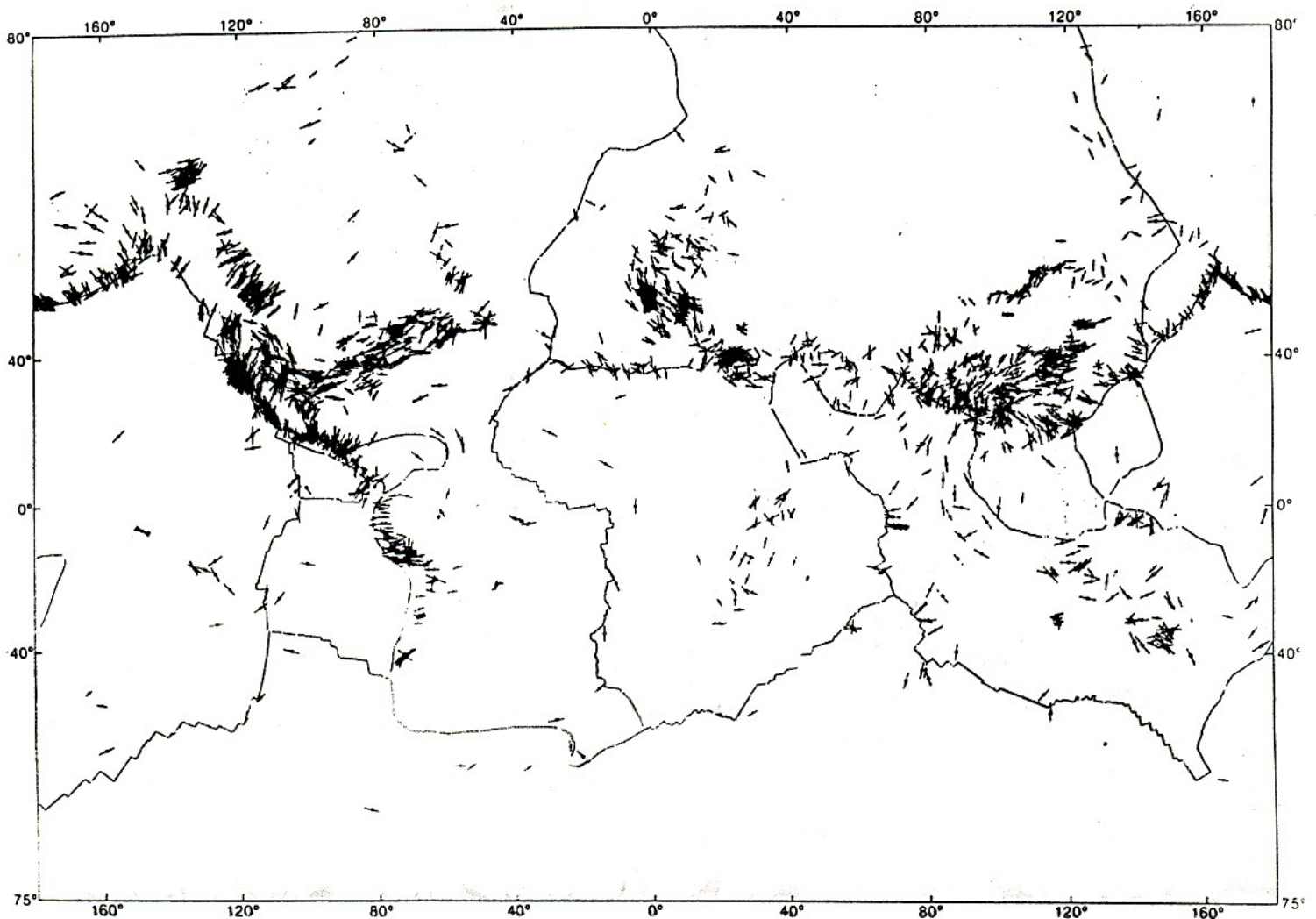
Se la zolla S è più grande della N, affinché il momento sia nullo (momento  $\propto$  forza  $\propto$  velocità) la zolla **più piccola** deve avere **velocità maggiore**.

Per il **pianeta Terra** con circa una dozzina di zolle è possibile trovare un sistema di riferimento (che si muoverà con la velocità media della mesosfera) tale che il **momento totale** esercitato da tutte le zolle sulla mesosfera sia **nullo**.





Vettori velocità assoluta dedotti dal moto delle  
zolle rispetto ai punti caldi.



Orientazioni dello sforzo massimo orizzontale compressivo