

## MISURE DI GRAVITÀ

Il valore della gravità in un punto di minima può essere determinato mediante l'osservazione di fenomeni influenzati da  $g$ , ad esempio il moto di un pendolo ( $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ) oppure la caduta libera di un corpo ( $s = \frac{1}{2}gt^2$ ). I metodi che utilizzano tali fenomeni vengono detti **dinamici** e forniscono delle **misure assolute** (valore della gravità nel punto).

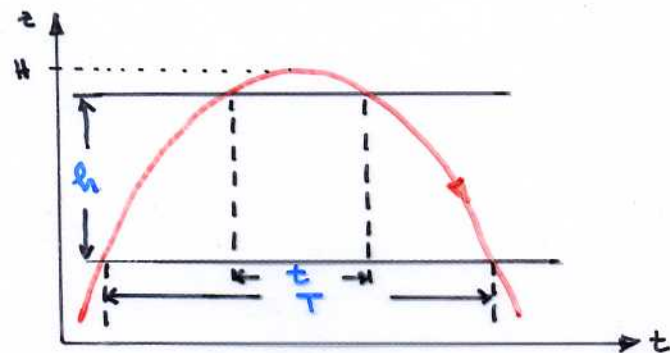
Le misure assolute sono alquanto laboriose, richiedendo tempo ed un controllo accurato sulle possibili cause di errore. Vengono pertanto effettuate per grandi variazioni di  $g$  (500  $\mu\text{gal}$ ) e lunghissime distanze.

Gli strumenti adatti ad una rapida misura della gravità sono da ricercare nei metodi **statici**, che prevedono l'osservazione di un sistema in equilibrio.

• gravimetri statici consentono soltanto **misure relative** della gravità (differenze rispetto ad un valore di  $g$  iniziale). Le misure sono rapide e possono raggiungere accuratette elevate ( $\mu\text{gal}$ )

# Gravimetro assoluto

Uno dei gravimetri assoluti più accurati ( $10 \mu g$ ) è quello dell'Istituto Metrologico Colonnelli di Torino, che si basa sulla caduta libera simmetrica: un corpo viene lanciato in alto e ricade. Per determinare  $g$  bisogna misurare due tempi ed una lunghezza.

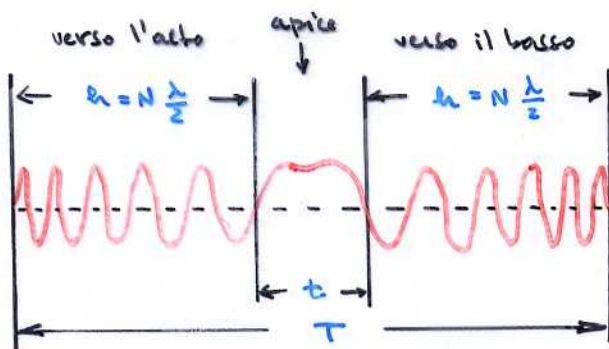


$$H = \frac{1}{2} g \left( \frac{T}{2} \right)^2$$

$$H - h = \frac{1}{2} g \left( \frac{t}{2} \right)^2$$

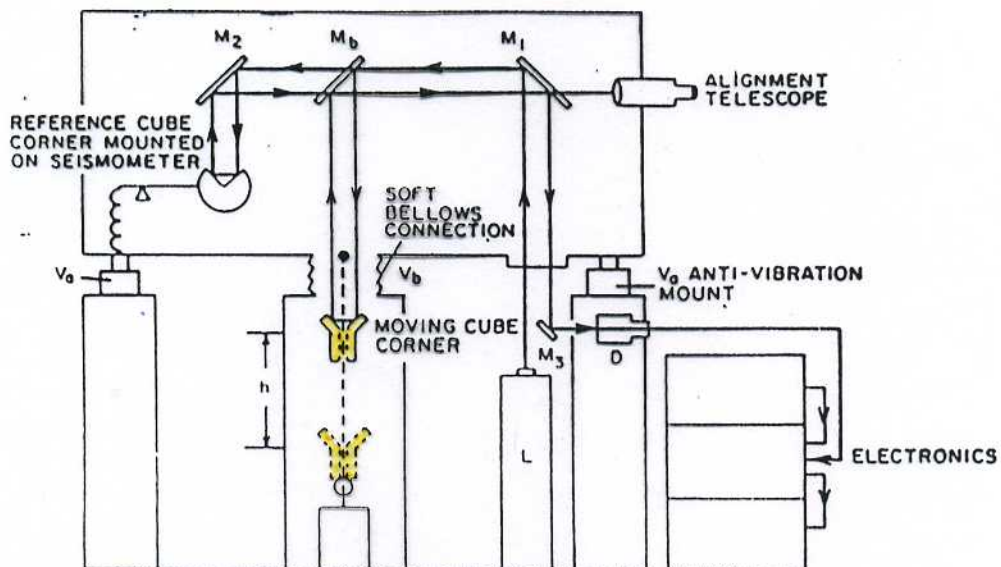
$$h = \frac{1}{8} g (T^2 - t^2)$$

$$g = \frac{8h}{T^2 - t^2}$$



lo strumento è essenzialmente un interferometro di Michelson: la lunghezza di riferimento è data dal braccio fisso (solo  $M_2$ ), la lunghezza da misurare è lo spostamento del braccio sul corpo.

Frange di interferenza



## Gravimetro lineare

Il principio è quello del dinamometro: una massa  $m$  sospesa ad una molla con costante  $k$ . Nella condizione di equilibrio avremo:

$$mg = kz_0$$

e se la gravità varia, sarà

$$mdg = k dz$$

da cui

$$\frac{dz}{dg} = \frac{m}{k}$$

e il rapporto dà la **sensibilità** dello strumento. Spostando la massa dalla condizione di equilibrio ed applicando la legge di Newton:

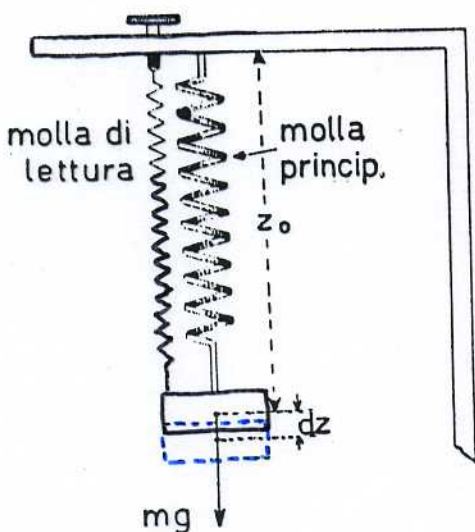
$$mg - kz = m \frac{d^2(z-z_0)}{dt^2}$$

$$\frac{d^2(z-z_0)}{dt^2} + \frac{k}{m}(z-z_0) = 0$$

L'equazione differenziale è quella del moto armonico con periodo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{dz}{dg}}$$

Si vede che la sensibilità è direttamente proporzionale al quadrato del periodo. Costruttivamente è difficile ottenere  $T > 1s$ , per cui se si vuole misurare  $dg \approx 10^{-5} g$  occorre valutare  $dz = \frac{1}{4\pi^2} 10^{-5} \approx .25 \times 10^{-6} \text{ cm}$  e si ha bisogno di ingrandimenti fortissimi! Per questo tali gravimetri sono stati abbandonati.





## Gravimetri astatici

La massa è sostenuta da un braccio rigido di lunghezza  $b$  girevole attorno ad un asse  $O$ . Avremo pertanto equilibrio tra momenti. Nella posizione di equilibrio sarà nullo il momento delle forze applicate  $M(\varphi, g(\varphi))$

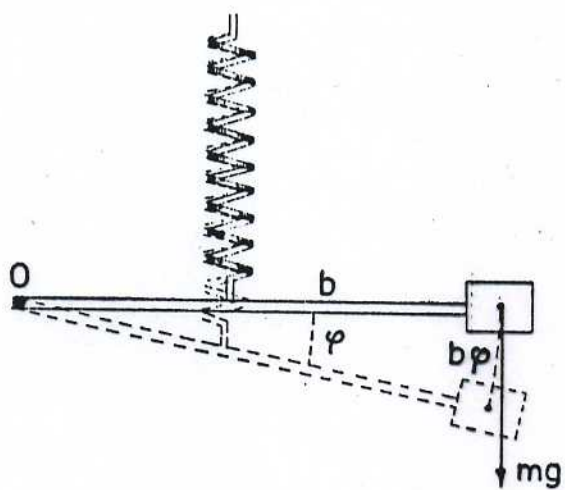
$$M(\varphi_0) = 0$$

Derivando

$$\frac{\partial M}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial M}{\partial g} dg = 0$$

si ottiene

$$\frac{d\varphi}{dg} = - \frac{\partial M / \partial g}{\partial M / \partial \varphi}$$



La **sensibilità**, il momento totale è dato dalla componente stabilizzante (elastica) e quella labilizzante (gravitazionale)

$$M = M_e - M_g$$

Per piccoli valori di  $\varphi$

$$M_g = mgb \cos \varphi \approx mgb \text{ ed avremo}$$

$\frac{\partial M_g}{\partial g} = mb$ , mentre  $\frac{\partial M_e}{\partial g} = 0$  perché  $M_e$  non dipende esplicitamente da  $g$ . Quindi sarà

$$d\varphi = - \frac{-mb}{\partial M / \partial \varphi} dg$$

e per uno spostamento infinitesimo  $ds$  della massa corrisponente ad una rotazione  $d\varphi$  si avrà:

$$ds = b d\varphi = \frac{mb^2}{\partial M / \partial \varphi} dg$$

Spostando la massa dal punto di equilibrio  $\varphi_0$  essa si metterà ad oscillare attorno al punto  $\varphi_0$ . Per il principio di d'Alembert, l'equazione del moto si otterrà uguagliando i momenti delle forze applicate a quelli delle forze d'inerzia.

Il momento delle forze applicate attorno al punto di equilibrio ( $\varphi$  piccolo e  $g$  costante) si può scrivere:

$$M(\varphi) = M(\varphi_0) + \left( \frac{\partial M}{\partial \varphi} \right)_0 \varphi + \dots$$

mentre il momento delle forze d'inerzia, essendo la accelerazione tangenziale  $b\ddot{\varphi}$ , sarà dato da

$$M_i = b \cdot m a_t = mb^2 \ddot{\varphi}$$

da cui si ricava che l'equazione del moto sarà

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{\left( \frac{\partial M}{\partial \varphi} \right)_0}{mb^2} \varphi = 0$$

che dà ancora un moto armonico di periodo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{mb^2}{\left( \frac{\partial M}{\partial \varphi} \right)_0}}$$

e pertanto anche in questo caso la sensibilità è proporzionale al quadrato del periodo.

Per ottenere periodi grandi e sensibilità elevate basterà realizzare

$$\left( \frac{\partial M}{\partial \varphi} \right)_0 \approx 0$$

Il procedimento di rendere  $(\frac{\partial M}{\partial \varphi})_0 \approx 0$  viene detto **astatizzazione** e può essere realizzato in vari modi:  
Per avere

$$\frac{\partial M}{\partial \varphi} = \frac{\partial M_e}{\partial \varphi} - \frac{\partial M_g}{\partial \varphi} \approx 0$$

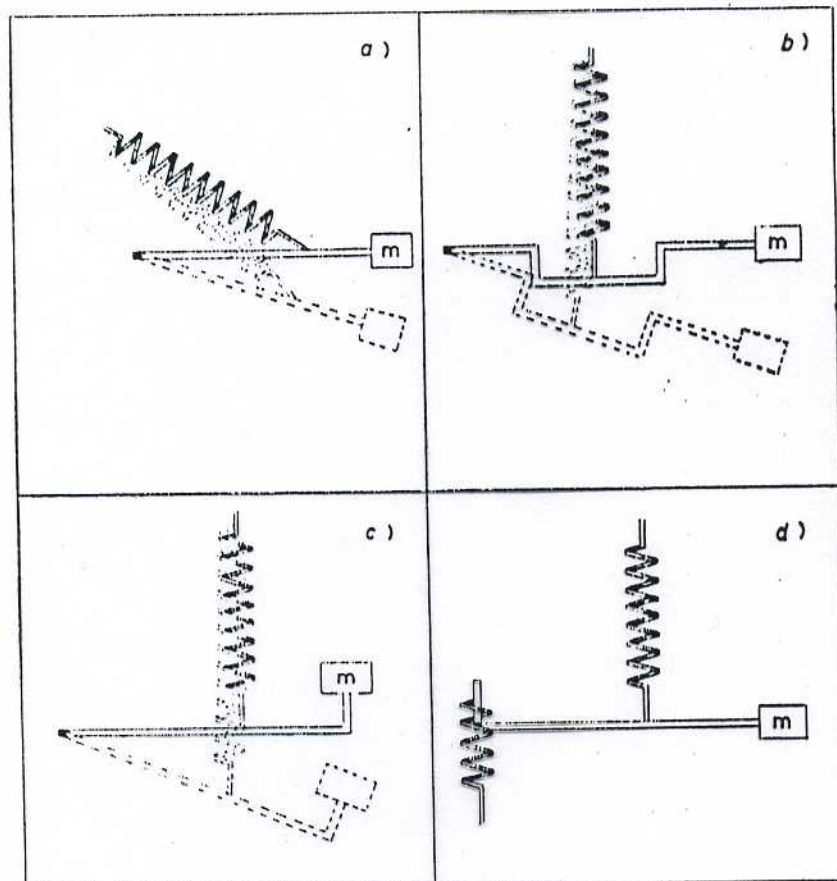
si può procedere in due modi:

① Rendere  $M_g$  indipendente da  $\varphi$  (per cui  $\frac{\partial M_g}{\partial \varphi} \approx 0$ ) e realizzare le condizioni geometriche del sistema in modo che sia  $\frac{\partial M_e}{\partial \varphi} \approx 0$

- a) lunghezza molla varia di pochissimo
- b) aumenta la tensione, ma diminuisce il braccio

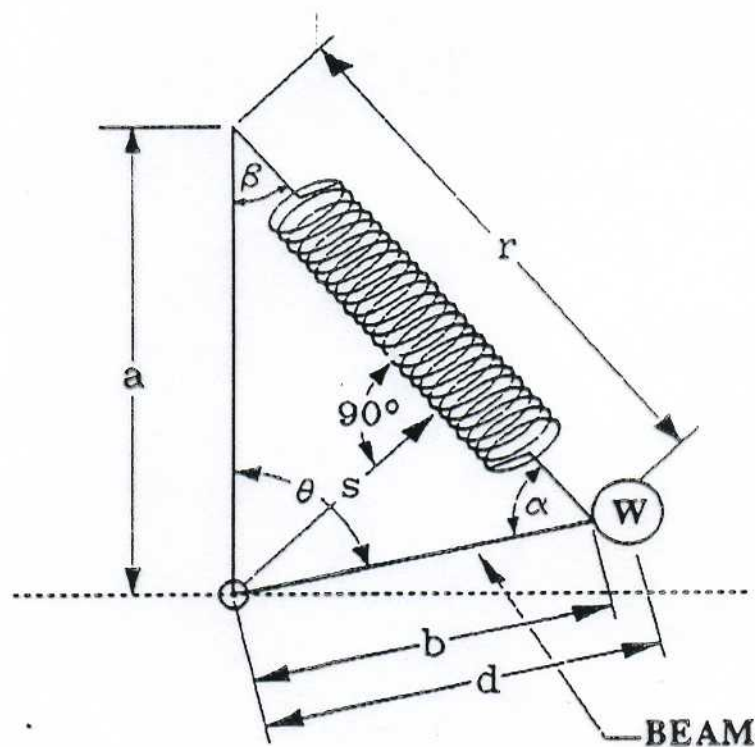
② Rendere  $\frac{\partial M_e}{\partial \varphi} \approx \frac{\partial M_g}{\partial \varphi}$

- c) aumenta  $M_e$ , ma aumenta pure  $M_g$
- d) ad un aumento di  $M_e$  si contrappone un momento contrario dovuto ad un'altra molla





# Gravimetro LaCoste - Romburg



Momento dovuto alla forza gravitazionale:

$$M_g = mg \sin \theta d$$

Momento dovuto alla molla di lunghezza zero:

$$M_e = -k_e r s$$

Si dimostra facilmente che questo equivale alla:

$$M_e = -k_e a b \sin \theta$$

Per il momento totale vale allora:

$$M = (mgd - k_e a b) \sin \theta$$

Con opportune scelte dei parametri, il momento di richiamo può essere fatto molto piccolo, ottenendo uno strumento molto sensibile.

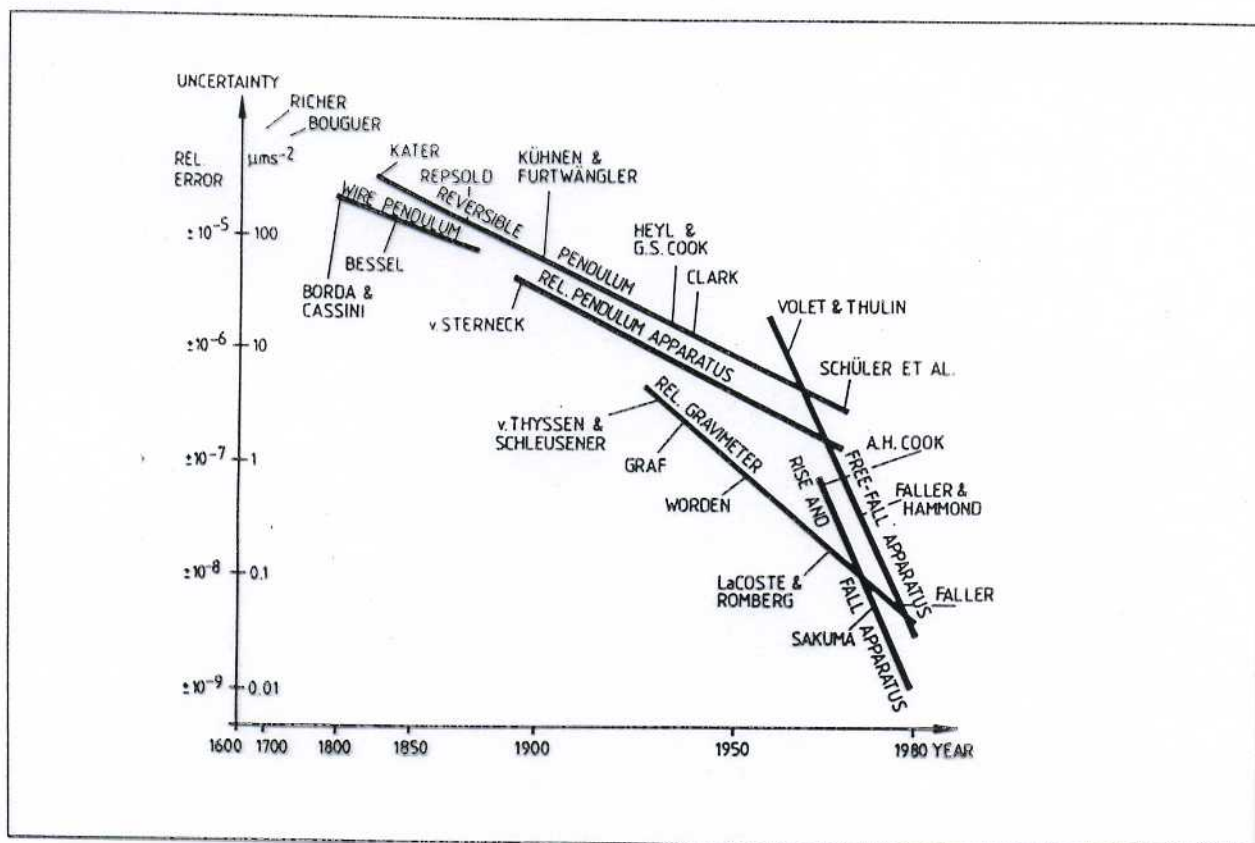


Fig. 8.2 - Incremento della precisione nelle misure gravimetriche terrestri.  
(Da Torge: *Gravimetry*, de Gruyter (1989), 1-465)



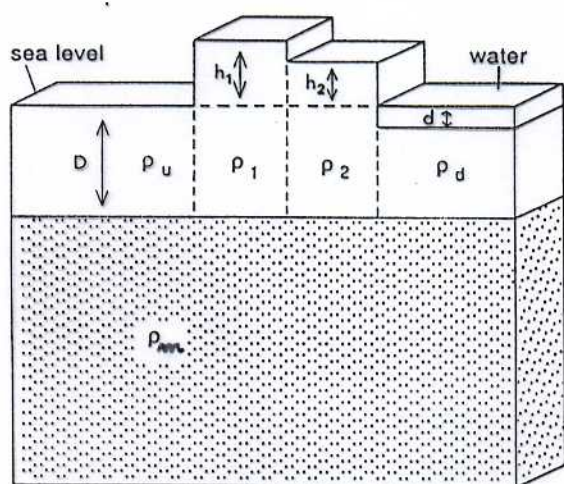
## Correzione isostatica

Le riduzioni fin qui considerate sono sufficienti per lo studio di distribuzioni di masse piuttosto superficiali, ma vanno ulteriormente corrette e applicate a regioni molto estese. Abbiamo già visto che l'altezza del geoide non è legata alla topografia e che quindi essa è compensata in profondità. Infatti le maggiori anomalie positive di Bouguer si trovano in corrispondenza degli oceani profondi, quelle negative in corrispondenza delle catene montuose. D'altro canto la anomalia in aria libera fluttua quasi dappertutto attorno allo zero. Ciò suggerisce che le masse esterne al geoide, eliminate nel calcolo della anomalia di Bouguer, vanno inserite all'interno della Terra con un metodo di compensazione detto isostatico.

Il principio dell'**isostasia** si fonda nel fatto che al di sotto di una certa **profondità di compensazione**, la Terra deve essere in equilibrio idrostatico. Ciò significa che il carico esercitato dagli strati sovrastanti la superficie alla profondità di compensazione deve mantenersi costante lungo la superficie della Terra. Ad un eccesso di carico superficiale (montagne, dorsali oceaniche) deve corrispondere una riduzione di densità negli strati sottostanti (al di sopra della profondità di compensazione), mentre ad un difetto di carico deve corrispondere un aumento di densità.

## Riduzione di Pratt (ipotesi di levitazione)

Secondo l'ipotesi di Pratt la superficie di compensazione, <sup>coincide con la discontinuità di Moho.</sup> a profondità costante,  $\gamma$  ha superficie terrestre può essere suddivisa in zone che corrispondono a sezioni orizzontali di colonne ad asse verticale in modo che la base inferiore sia sulla superficie di compensazione e la base superiore alla quota media della zona in esame. A ciascuna delle colonne compete una densità costante, ma diversa in modo da avere pressione uguale alla profondità di compensazione.



Indicando, con  $D$  la profondità di compensazione ed  $h$  la quota media della sezione in esame, sarà

$$\rho(h+D) = \text{cost.}$$

Applicando la relazione alla figura a fianco:

$$p_u D = p_1(h_1 + D) = p_2(h_2 + D) = p_d d + p_d(D - d)$$

In questo modello la compensazione deriva dal fatto che le montagne e la parte loro sottostante hanno una densità  $p_2$  più bassa della densità  $p_u$  al di sotto di una pianura a livello del mare, mentre sotto gli oceani avremo materiali di densità  $p_d$  più elevata.

$$p_1 = p_u \frac{D}{h_1 + D}$$

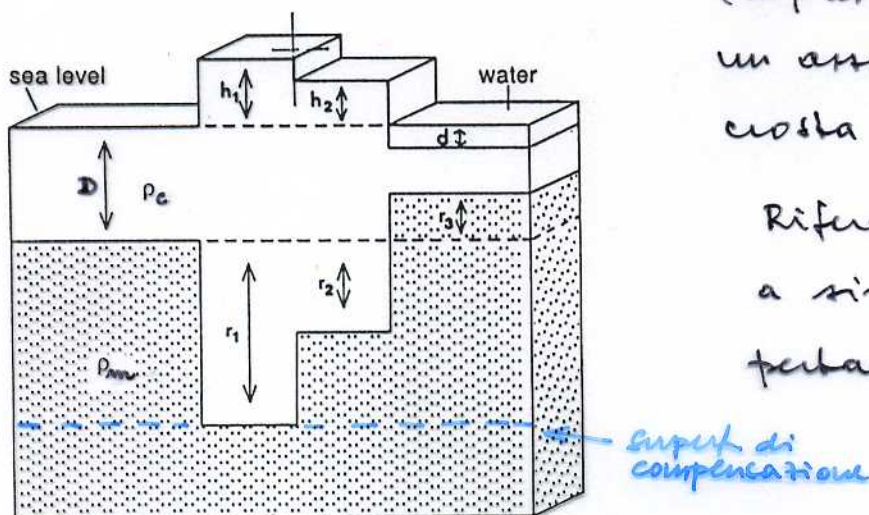
$$p_d = \frac{p_u D - p_d d}{D - d}$$

Le profondità di compensazione usate di solito sono 50, 80, 113.7 km.



## Riduzione di Airy

Nell'ipotesi di Airy (anche Airy Heiskanen) la densità  $\rho_c$  della crosta viene assunta costante e generalmente uguale a  $2.67 \text{ g/cm}^3$  e la densità del mantello  $\rho_m$  è assunta costante con valore  $3.27 \text{ g/cm}^3$ . In questa ipotesi la superficie di compensazione non coincide con la discontinuità crosta-mantello. La compensazione isostatica si ottiene in modo che ad un aumento di massa in superficie (montagne) corrisponda uno sprofondamento della crosta nel mantello sottostante (radici delle montagne) e che ad una diminuzione di massa in superficie (depressione marina) corrisponda un assottigliamento della crosta (antiradici).



Riferendoci alla figura a sinistra avremo pertanto:

$$\rho_c D + \rho_m r_1 = \rho_c (h_1 + D + r_1) = \rho_c (h_2 + D + r_2) + \rho_m (r_1 - r_2) = \\ = \rho_w d + \rho_c (D - d - r_3) + \rho_m (r_1 + r_3)$$

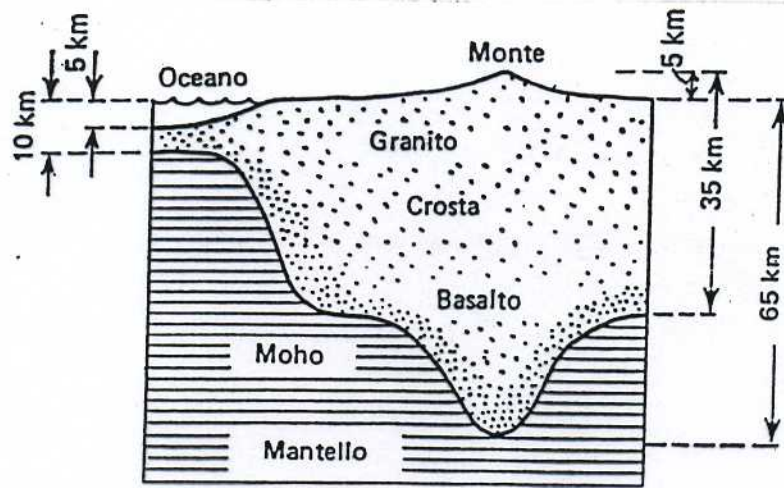
Una montagna di altezza  $h_1$  avrà pertanto radici di spessore  $r_1$  dato da

$$r_1 = h_1 \frac{\rho_c}{\rho_m - \rho_c}$$

mentre un oceano di profondità  $d$  avrà delle antiradici di spessore  $r_3$  dato da

$$r_3 = d \frac{\rho_c - \rho_w}{\rho_m - \rho_c}$$



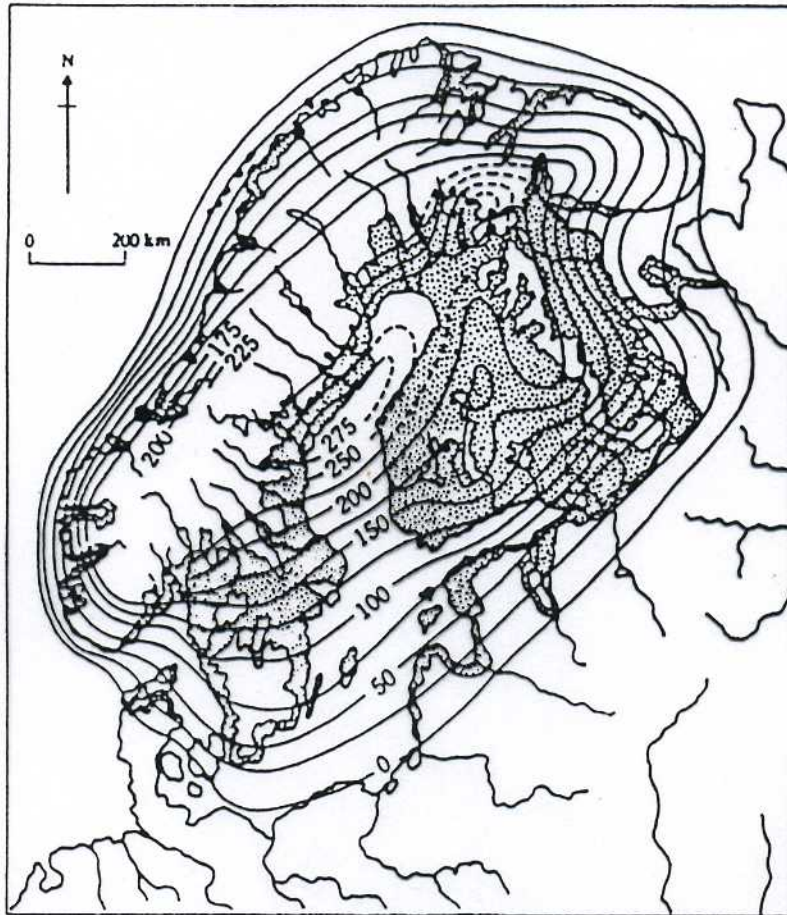


Equilibrio isostatico tra crosta e mantello.

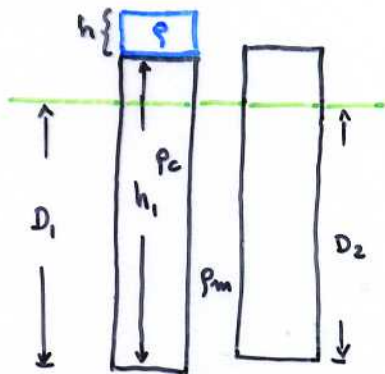
Le due ipotesi (di Pratt e di Airy) sono molto diverse, ma è determinare quale delle due (o se una loro combinazione) opera in una certa regione non è facile. Comunque, secondo recenti studi sulla struttura crostale dalla propagazione di onde sismiche, si pensa che il modello di Airy sia quello più vicino al vero.

Assumiamo una montagna sia in equilibrio isostatico con la pianura vicina. L'anomalia di Bouguer sulle montagne sarà negativa, perché sotto il geode c'è una mancanza di massa non eliminata nella correzione della piastina. L'anomalia in aria libera invece sarà positiva e molto più piccola. Positiva, perché le montagne sono più vicine al geode che le strutture di compensazione profonde.

## SOLLEVAMENTO DELLA SCANDINAVIA



Il sollevamento può essere spiegato da un riassetto isostatico dovuto alla scomparsa della coltre glaciale.



ha condizione isostatica  $\bar{z}$  (alla profondità  $D_1$ ):

$$\rho h + \rho_c h_1 = \rho_c h_1 + \rho_m (D_1 - D_2)$$

$$\rho h = \rho_m (D_1 - D_2)$$

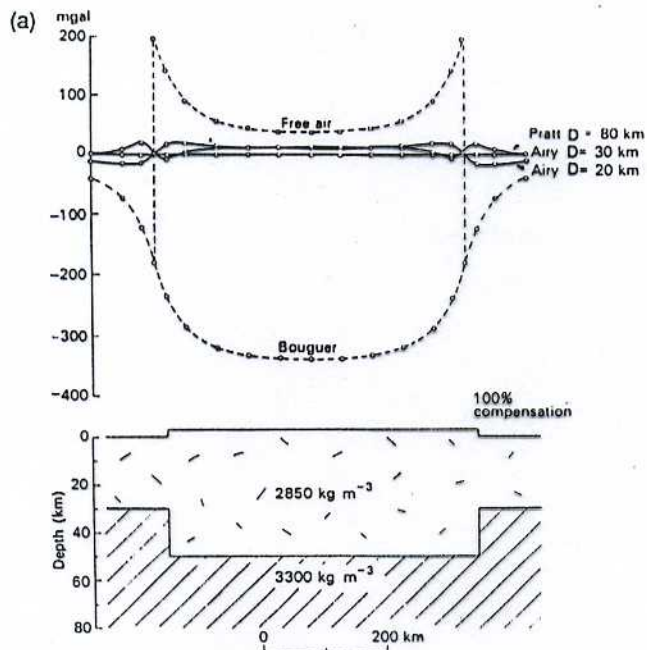
$$h = \frac{\rho_m}{\rho} (D_1 - D_2)$$

con  $D_1 - D_2$  il sollevamento osservato

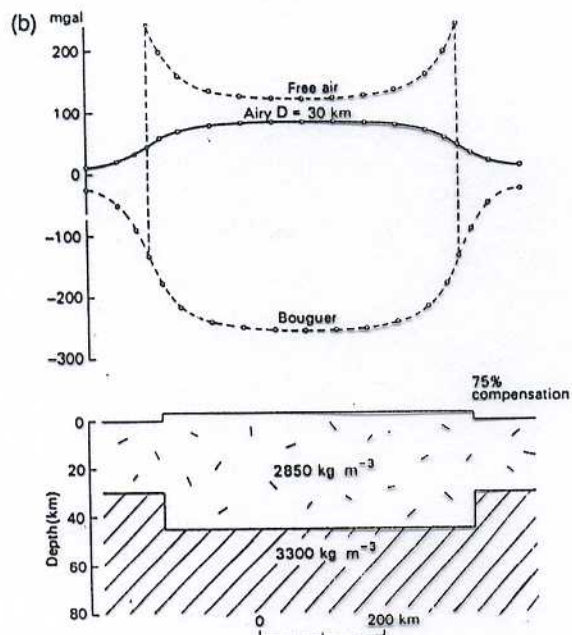
Prendendo:  $\rho = 0.9 \text{ g/cm}^3$ ,  $\rho_m = 3.0 \text{ g/cm}^3$ ,  $D_2 - D_1 = 275 \text{ m}$   
 si trova  $h \approx 920 \text{ m}$



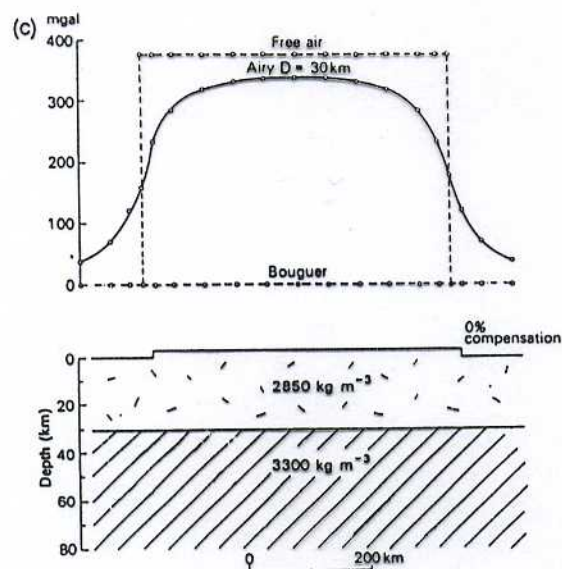
# ANOMALIE DI GRAVITÀ SU UNA CATENA MONTUOSA



COMPENSAZIONE  
ISOSTATICA  
100%



COMPENSAZIONE  
ISOSTATICA  
75%



COMPENSAZIONE  
ISOSTATICA  
0%



Il modo più semplice per determinare se una grande  
 struttura sia in equilibrio isostatico o meno è di  
 considerare l'anomalia in aria libera  $g_{FA}$ . Nel caso  
 di strutture compensate  $g_{FA}$  è molto piccola (contano  
 dai bordi della struttura) se la struttura è estesa per  
 almeno dieci volte la sua profondità di compensazione.  
 Se non c'è compensazione (o solo compensazione parziale),  
 $g_{FA}$  sarà positiva raggiungendo fino a qualche centinaio  
 di milligal.  $g_{FA}$  è pertanto quasi un'anomalia isostatica.  
 Essa non assume un meccanismo specifico di compensazione,  
 ma risulta piccola se la compensazione è completa.  
 come già visto  $g_B$  è invece negativa per strutture compensate  
 (parzialmente o totalmente), mentre è zero per strutture non  
 compensate. Possiamo introdurre un **coefficiente di**  
**compensazione approssimato**

$$i = \frac{g_B}{g_B - g_F}$$

che sarà zero quando non c'è compensazione ed uno quando  
 la compensazione è totale.

Per calcolare l'**anomalia isostatica**  $g_I$  bisogna però  
 scegliere un modello di densità. Si avrà allora:

$$g_I = g_m - g_F + \Delta g_{FA} - \Delta g_B + \Delta g_T + \Delta g_I$$

con (Airy)

$$\Delta g_I = 2\pi G \Delta \rho r_h$$

/  
 contrasto di densità  
 tra "radice" e mantello

~  
 profondità radice sotto  
 montagna di altezza h

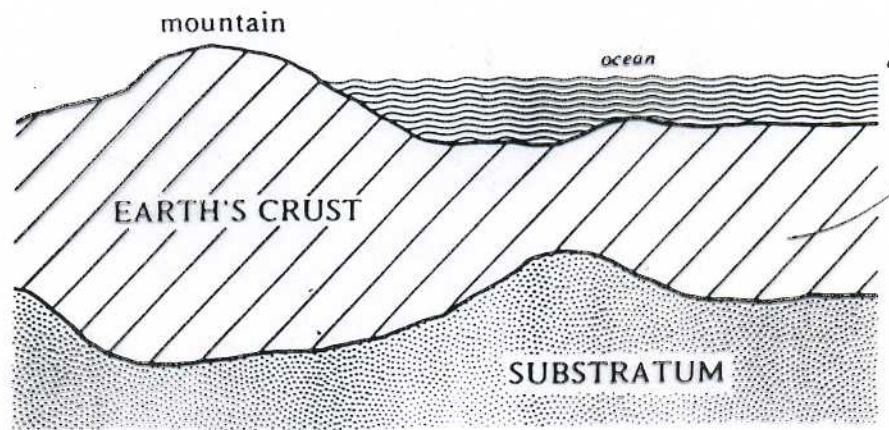


Figure 13.1 Schematic picture of isostasy.

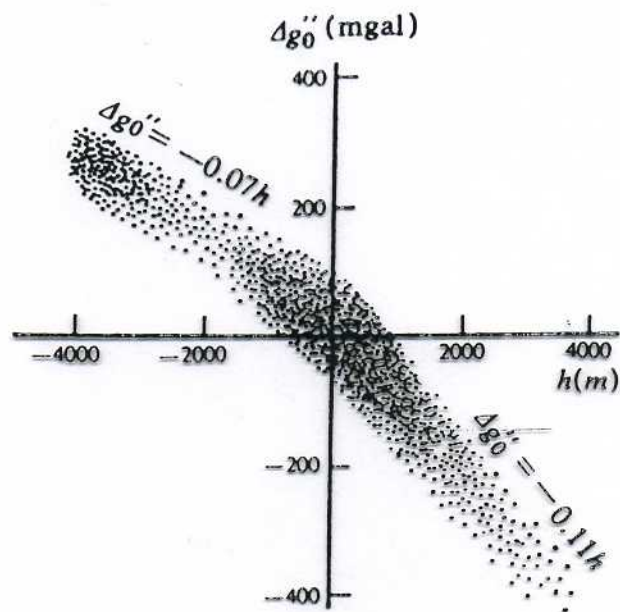


Figure 13.2 Relationship between the Bouguer anomalies and their heights  $h$ .