

CALORE

Il calore giunge alla superficie terrestre sia dal Sole che dall'interno della Terra. I flussi di energia ricevuti da tutta la Terra sono: $2 \times 10^{17} \text{ W}$ dal sole (circa $4 \times 10^2 \text{ W/m}^2$), dallo interno invece $4 \times 10^{13} \text{ W}$ (circa $8 \times 10^{-2} \text{ W/m}^2$). Per confronto l'energia liberata dai terremoti è circa 10^{11} W .

Il calore può propagarsi in vari modi!

Conduzione - trasferimento attraverso il mezzo tramite interazioni molecolari od atomiche; è la vibrazione termica a propagarsi!

Convezione - il trasferimento avviene poiché le molecole stesse viaggiano da una parte all'altra nel mezzo; è più efficace della conduzione; possibile nei liquidi e gas.

Radiazione - trasferimento diretto mediante onde elettromagnetiche

Advezione - quando il mezzo interno contenente calore si muove; (ad.es. sollevamento isostatico della litosfera, moto di una zolla...)

Nella litosfera il calore viene trasferito in modo predominante attraverso la conduzione; nel mantello e nel nucleo esterno la convezione è più efficace.

Poiché non è possibile misurare la temperatura in profondità, la struttura termica della Terra viene dedotta extrapolando le misure ottenute vicino alla superficie, da osservazioni sismologiche, dalla conoscenza di fisica delle alte pressioni e temperature, da modelli termici della Terra.

CONDUZIONE

Il **flusso di calore** viene definito come quantità di energia termica trasferita per unità di superficie e unità di tempo. Ovviamente esso sarà maggiore ove la differenza di temperatura ΔT è grande e lo spessore Δz , entro cui questa differenza esiste, piccolo; cioè ove c'è un gradiente di temperatura (differenza di temperatura per unità di lunghezza) elevato:

$$q \approx \Delta T / \Delta z$$

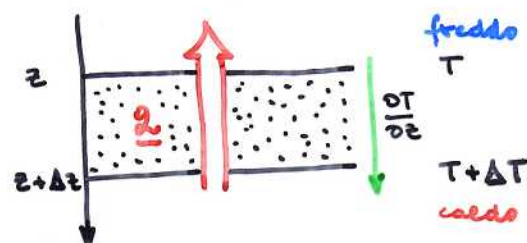
La costante di proporzionalità dipende dal mezzo ed è detta **conduttività termica**, k . Per $\Delta z \rightarrow 0$ avremo

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial z}$$

ovvero, in generale

$$\underline{q} = -k \underline{\nabla} T$$

Il flusso di calore ha ovviamente direzione opposta a quello del gradiente di temperatura (il calore si propaga da regioni calde a quelle fredde), per cui il segno meno.



Poiché nella Terra la temperatura aumenta con la profondità, il flusso di calore è diretto verso la superficie:

Il flusso di calore viene misurato indirettamente, misurando:

- ① il gradiente termico (verticale)
- ② la conduttività termica

Il flusso di calore è essenzialmente verticale, poiché le variazioni laterali di temperatura nella Terra sono trascurabili rispetto alle verticali!

UNITA' DI MISURA

$$[q] = \frac{\text{calore (energia)}}{\text{superficie} \cdot \text{tempo}} = \frac{\text{J}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Unità CGS

$$\frac{\text{cal}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s}}$$

$$1 \text{ HFU} = 10^{-6} \frac{\text{cal}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s}} \approx 42 \text{ mW/m}^2$$

CONDUTTIVITA' TERMICA DELLE ROCCE

Material	Thermal conductivity, W/m-° C)
Copper	400
Quartzite	7.2
Salt	4.8
Olivine	4.4
Limestone	3.2
Sandstone	3.2
Granites	2.4
Gabbro	2.4
Shale	1.6
Deep sea sediment	0.8
Water	0.528

$$[k] = \frac{[q][L]}{[T]} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot \frac{\text{m}}{^\circ\text{C}} = \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot ^\circ\text{C}} \quad \text{CGS} \rightarrow \frac{\text{cal}}{\text{cm} \cdot \text{s} \cdot ^\circ\text{C}}$$

NB: $1 \text{ cal} = 4.186 \text{ J}$

$$1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 0.24 \times 10^{-4} \frac{\text{cal}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s}}$$

Atenti a non confondere il gradiente termico con il flusso di calore! In assenza di sorgenti di calore il flusso di calore è essenzialmente costante con la profondità (altrimenti si avrebbe accumulo o sottrazione di calore in certi strati modificandone la temperatura). Il gradiente termico invece può variare con la profondità, se la conducibilità termica non è costante.

ESEMPIO:

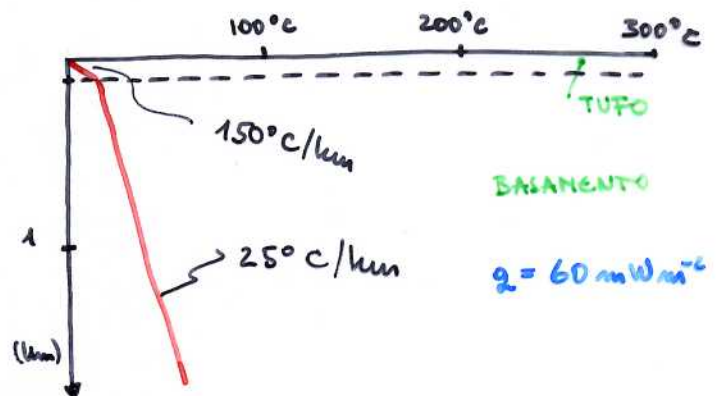
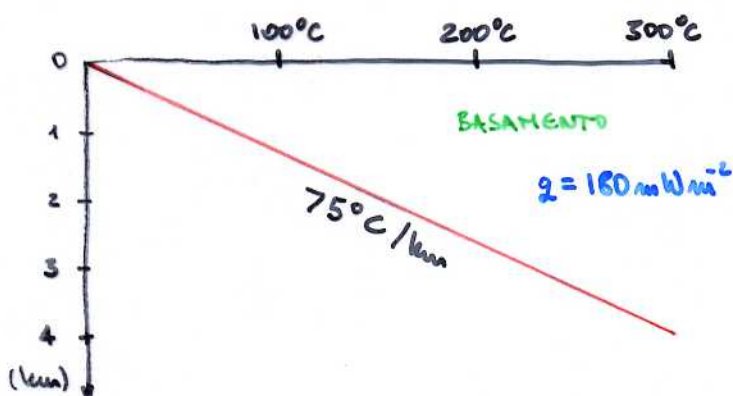
A che profondità la temperatura è di 300°C ?

In una zona con rocce esposte in superficie abbiamo $q = 180 \text{ mW m}^{-2}$ e la conducibilità termica delle rocce è $k = 2.4 \text{ W m}^{-1}\text{C}^{-1}$. Pertanto il gradiente termico risulta

$$\Delta T / \Delta z = q / k = 75^\circ\text{C/km}$$

ed assumendo la temperatura di superficie di 0°C , la temperatura di 300°C si troverà a 4 km di profondità.

Supponiamo però che in una località vicina i primi 100 m siano composti da tufo vulcanico con $k = 0.4 \text{ W m}^{-1}\text{C}^{-1}$ e $q = 60 \text{ mW m}^{-2}$. Il gradiente termico nel tufo risulta essere 150°C/km , mentre, supponendo il basamento uguale a prima, risulta essere 25°C/km sotto di esso. Per cui alla base del tufo la temperatura sarà di 15°C e per avere un incremento di altri 285°C con un gradiente di 25°C/km , occorrono ancora 11.4 km , per cui la temperatura di 300°C si troverà a 11.5 km di profondità.



GENERAZIONE DI CALORE RADIOATTIVO

Gli elementi radioattivi che contribuiscono per la maggior parte alla generazione di calore interna alla Terra sono l'uranio (U), il torio (Th) ed il potassio (K). Sebbene presenti nella crosta in piccolissime quantità (parti per milione per U, Th; percento per K) e nel mantello su due ordini di grandezza di meno, la loro produzione di calore è notevole.

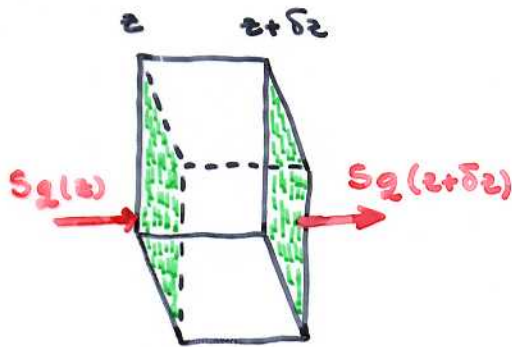
Produzione di calore per alcuni tipi di roccia (μWm^{-3})

Granito	2.5
Basalto tholeitico	0.08
Basalto alcalino	0.5
Peridotite	0.006
Crosta contin. sup.	1.0
Crosta oceanica	0.5
Mantello non impoverito	0.02

Il tasso di generazione di calore è comunque influenzato dalla produzione del mantello (volume!) e solo un quinto è generato nella crosta.

Il calore totale prodotto dalla crosta e dal mantello è di circa $2 \times 10^{13} \text{ W}$

EQUAZIONE DI CONDIZIONE DEL CALORE



Consideriamo un piccolo elemento di volume di area S ed altezza δz ed assumiamo il calore si propaga solo attraverso le superfici indicate.

Un cambio di temperatura δT nel tempo δt dipende da:

- ① Flusso di calore netto attraverso le superfici
- ② Calore generato nell'elemento di volume
- ③ Capacità termica (calore specifico) del mezzo

Il calore che entra nel volume attraverso la superficie S al livello z sarà $Sg(z)$, mentre il calore che esce attraverso la superficie S al livello $z + \delta z$ sarà $Sg(z + \delta z)$. Sviluppando l'ultimo termine in serie di Taylor ed ignorando i termini di ordine $(\delta z)^2$ e superiori:

$$g(z + \delta z) = g(z) + \delta z \frac{\partial g}{\partial z} + \dots$$

Per cui il calore netto che resta nel volume sarà

$$Sg(z) - Sg(z + \delta z) = -S\delta z \frac{\partial g}{\partial z}$$

Supponendo che il calore generato entro il volume lo sia ad un tasso A , il calore totale generato per unità di tempo sarà

$$AS\delta z$$

Il calore totale acquisito per unità di tempo dall'elemento di volume sarà

$$AS\delta z - S\delta z \frac{\partial g}{\partial z}$$

L'incremento di temperatura dovuto a questo calore per unità di tempo è determinato dal **calore specifico** c_p , che è la quantità di calore necessaria per far aumentare di 1°C la massa di 1 kg di un dato materiale. Il tasso di acquisizione di temperatura sarà

$$c_p \delta \delta z \rho \frac{\delta T}{\delta t}$$

ed avremo pertanto

$$c_p \delta \delta z \rho \frac{\delta T}{\delta t} = A \delta \delta z - \delta \delta z \frac{\partial q}{\partial z}$$

Semplificando e passando al limite $\delta t \rightarrow 0$

$$c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = A - \frac{\partial q}{\partial z}$$

Essendo $q = -k \frac{\partial T}{\partial z}$ avremo

$$c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = A + k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{A}{\rho c_p} + \frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Generalizzando a 3-D

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{A}{\rho c_p} + \kappa \nabla^2 T}$$

Ove si è introdotto la costante $\kappa = \frac{k}{\rho c_p}$, detta **diffusività termica**, che indica l'abilità del corpo a perdere calore per conduzione.

L'equazione si semplifica notevolmente nel caso di **stazionarietà** (la temperatura non cambia nel tempo; condizioni di equilibrio termico)

$$\nabla^2 T = - \frac{A}{k}$$

e quando non è presente la generazione di calore ($A=0$):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T$$

Eq. della diffusione

GEOTERME DI EQUILIBRIO

La curva indicante la variazione della temperatura con la profondità z è detta **geoterma**. La temperatura in una colonna di roccia dipenderà da fattori interni (conduttività, calore specifico, densità, generazione di calore) ed esterni (flusso di calore alla base, temperatura di superficie, eventuali erosioni e depositi). Per un flusso di calore costante, la colonna raggiunge un equilibrio termico ($\partial T / \partial t = 0$), per cui

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = - \frac{A}{k}$$

Per trovare $T(z)$ dobbiamo integrare l'equazione due volte e determinare due costanti di integrazione (mediante due condizioni al contorno).

Assumendo la superficie libera a $z=0$, le due condizioni possono essere:

$$(1) \quad T=0 \quad \text{per} \quad z=0$$

$$(2) \quad q = -q_0 = -k \partial T / \partial z \quad \text{per} \quad z=0$$

Integrando una volta otteniamo

$$\partial T / \partial z = - \frac{A}{k} z + c_1$$

Dalla seconda condizione al contorno $\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{q_0}{k}$ otteniamo $c_1 = q_0/k$.

Integrando nuovamente

$$T(z) = - \frac{A}{2k} z^2 + \frac{q_0}{k} z + c_2$$

Dalla prima condizione al contorno $T(0)=0$ otteniamo $c_2=0$.

La temperatura nella colonna di roccia z data quindi da

$$T(z) = - \frac{A}{2k} z^2 + \frac{q_0}{k} z$$

Nel caso la seconda condizione al contorno assegni un dato flusso di calore alla base della colonna $q(z=d) = -q_d$, la geoterma sarà data da

$$T(z) = - \frac{A}{2k} z^2 + \left(\frac{q_d + A d}{k} \right) z$$

Variations della geotermia per variazioni di conducibilità, generazione radioattiva di calore, flusso di calore alla base.

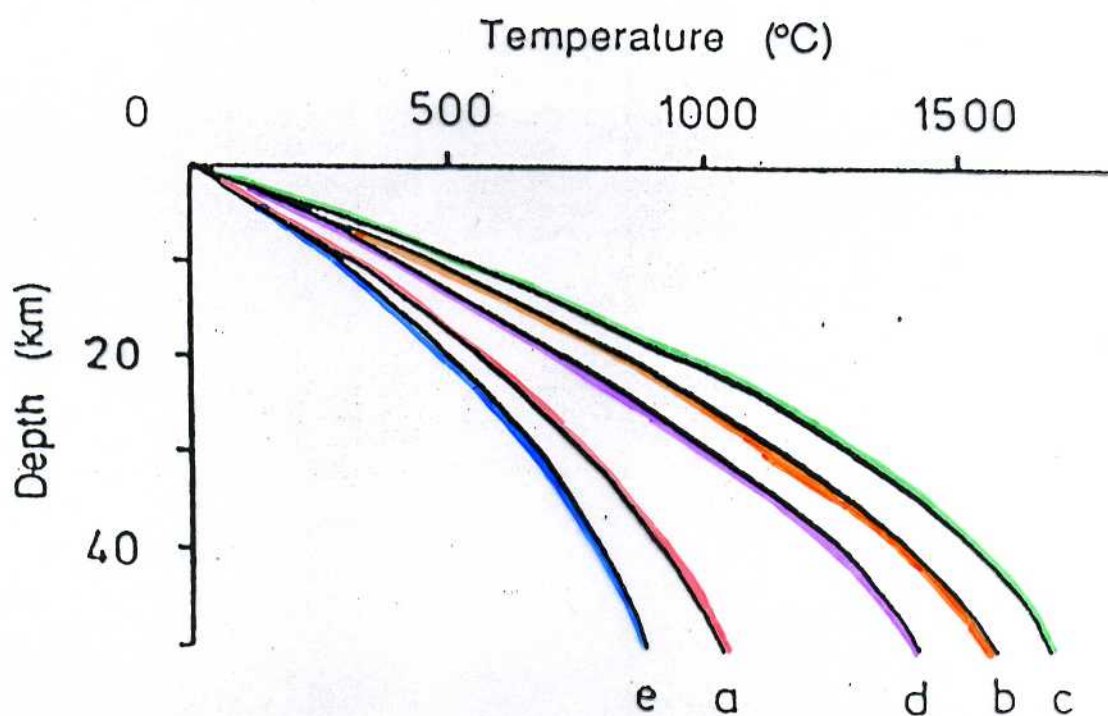


Figure 7.3. Equilibrium geotherms calculated from Eq. (*) for a 50 km thick column of rock. Curve **a**: standard model with conductivity $2.5 \text{ W m}^{-1} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$, radioactive heat generation $1.25 \mu\text{W m}^{-3}$ and basal heat flow $21 \times 10^{-3} \text{ W m}^{-2}$. Curve **b**: standard model with conductivity reduced to $1.7 \text{ W m}^{-1} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$. Curve **c**: standard model with radioactive heat generation increased to $2.5 \mu\text{W m}^{-3}$. Curve **d**: standard model with basal heat flow increased to $42 \times 10^{-3} \text{ W m}^{-2}$. Curve **e**: standard model with basal heat flow reduced to $10.5 \times 10^{-3} \text{ W m}^{-2}$. (From Nisbet and Fowler 1982.)

(*)

$$T(z) = -\frac{A}{2k}z^2 + \frac{g_d + Ad}{k}z$$

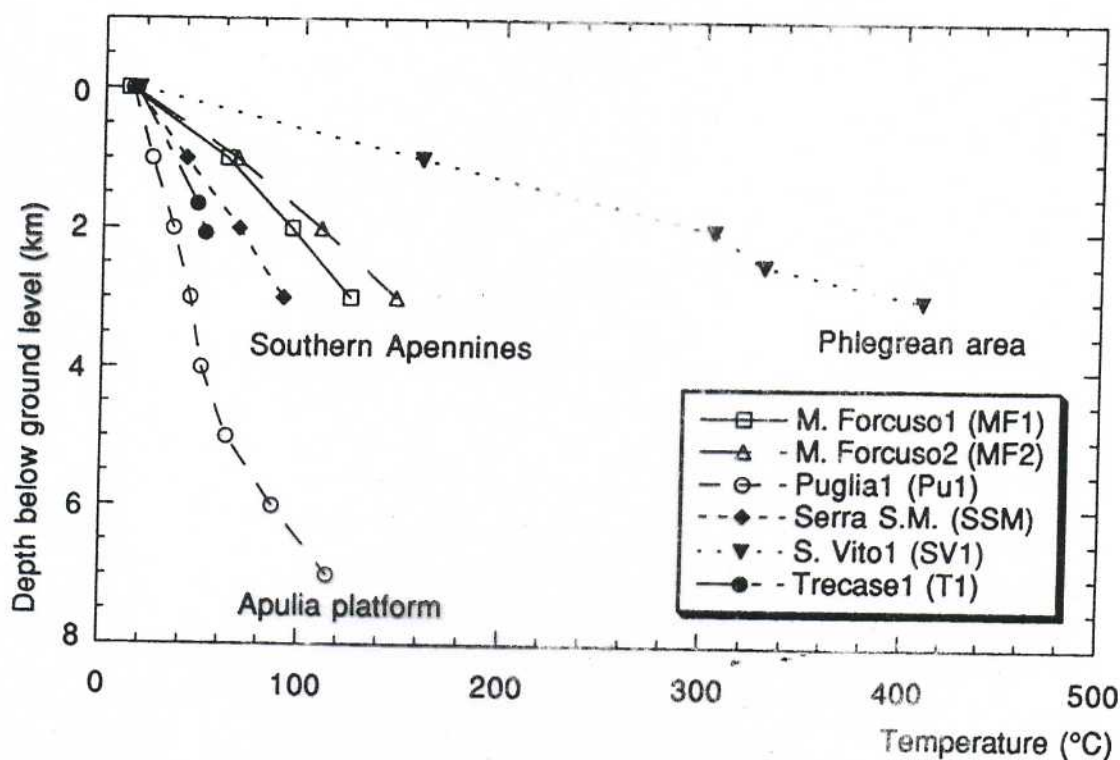


Figure 7.6 Temperature distribution with depth in the Southern Apennines. The thermal gradients increase from the foreland Apulia platform towards the inner areas of the orogen. The geotherms in the Southern Apennines and Phlegrean area are comparable with the Northern Apennines and Tuscany geothermal area, respectively. The locations of the boreholes are shown in Figure 7.2.

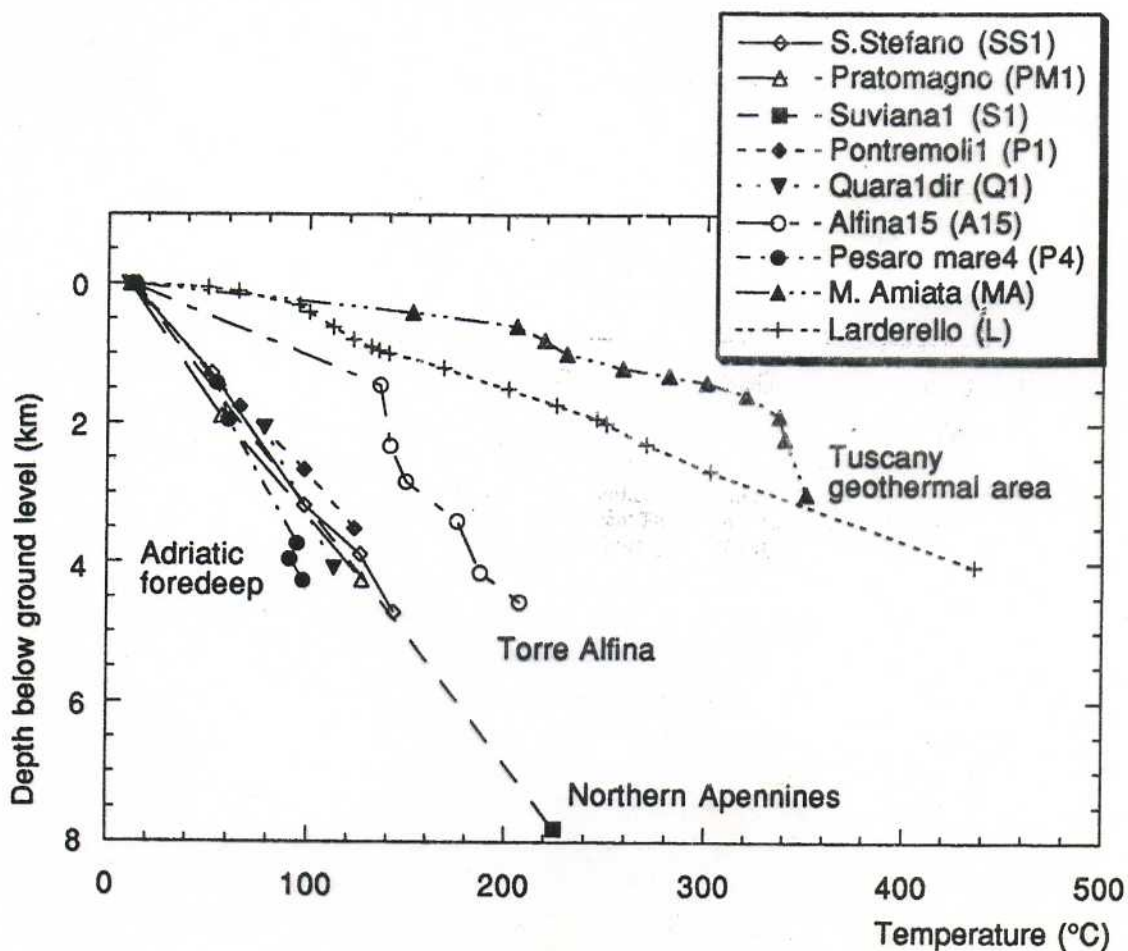


Figure 7.5 Temperature distribution with depth in the Northern Apennines. The thermal gradients increase from the Adriatic foredeep areas towards the inner (Tuscany) areas. Tuscany and Torre Alfina geotherms are affected by upward convective fluid migration. The location of the boreholes is shown in Figure 7.2.

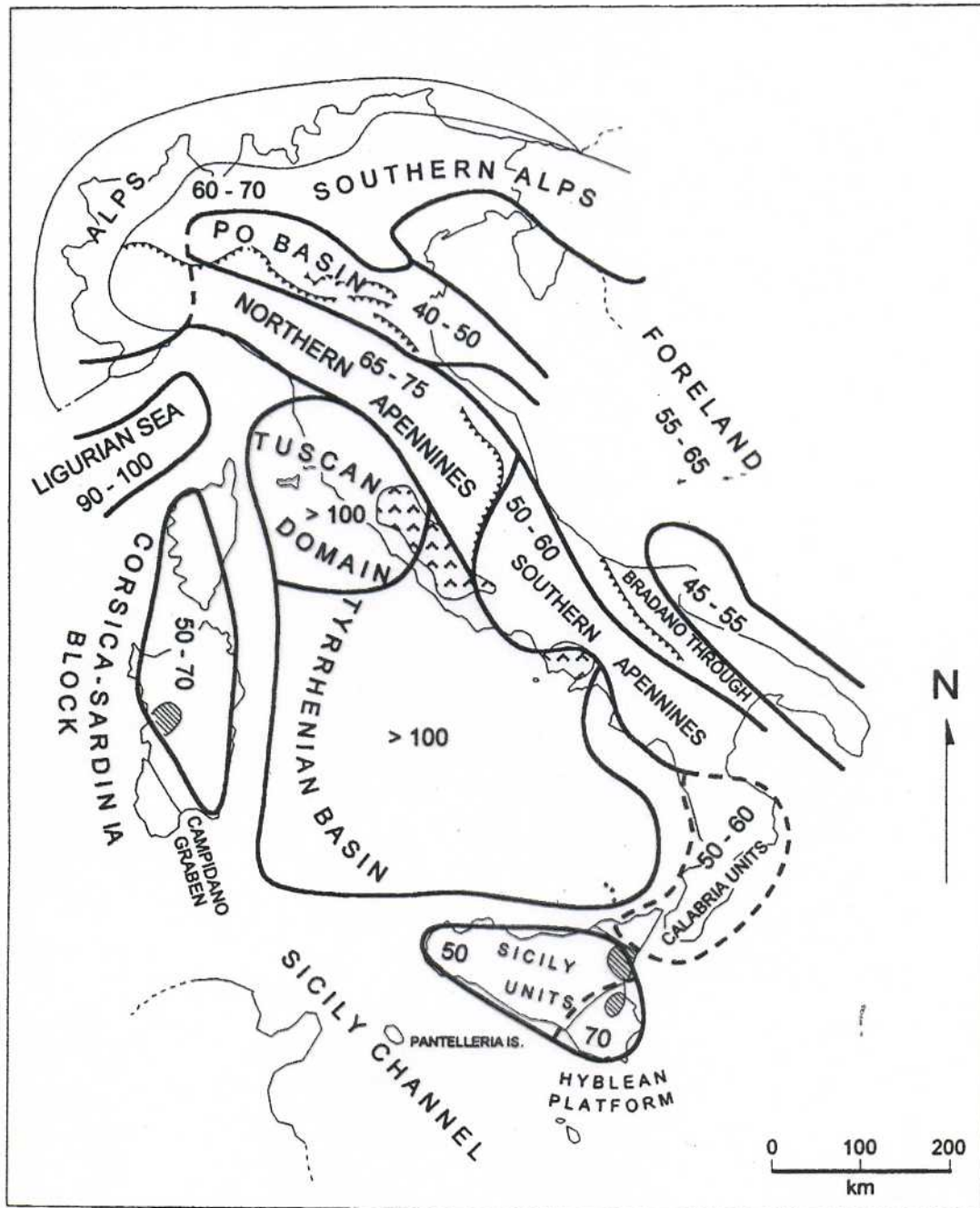


Figure 7.7 Average values of the undisturbed conductive heat flow (mW m^{-2}) for the main tectonic provinces of Italy, estimated from well data and 1-D thermal modelling.

Scala dei tempi nella conduzione di calore

Strutture geologiche giovani come le catene montuose recenti non sono di solito in equilibrio termico. Siccome la conduzione delle rocce è piccola, ci vogliono parecchi milioni di anni per raggiungere un nuovo equilibrio termico.

Se nell'esempio precedente il flusso di calore passa da 21 a $42 \times 10^{-3} \text{ W m}^{-2}$ (dalla curva a alla curva d.), la temperatura nella colonna salirebbe lentamente. La temperatura iniziale a 20 km di profondità sarebbe 567°C ; 20 Ma dopo l'incremento del flusso di calore salirebbe a 580°C ; solo dopo 100 Ma la temperatura raggiungerebbe 700°C , vicino al nuovo valore di equilibrio di 734°C .

Dalla costante di diffusività (che ha dimensioni m^2/s), possiamo definire un **tempo di diffusione caratteristico**

$$\tau = l^2 / \kappa$$

che indica il tempo necessario per un cambio di temperatura a propagarsi per una lunghezza l in un mezzo con diffusività termica κ . Similmente la **distanza di diffusione termica caratteristica**

$$l = \sqrt{\kappa \tau}$$

dà la distanza su cui un cambio di temperatura si propaga nel tempo τ .

Ci vorrebbero varie decine di milioni d'anni affinché un cambiamento termico si propagasse da una zona di subduzione ($l = 100 \text{ km}$) in superficie - se tutto il calore fosse trasferito per conduzione. Tuttavia processi di fusione ed intrusioni (convezione!) sono importantissimi per il trasferimento di calore in zone di subduzione!

SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DI DIFFUSIONE

Consideriamo un semispazio omogeneo a temperatura $T=T_0$. Supponiamo che per $t>0$ la superficie libera $z=0$ venga mantenuta a $T=0$. Se $A=0$, come si raffredda il mezzo?

L'equazione differenziale che bisogna risolvere è l'equazione della diffusione

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

La risoluzione di quest'equazione è al di là degli scopi di questo corso. La soluzione dell'equazione che soddisfa le condizioni di contorno di cui sopra risulta esprimibile mediante la **funzione di errore**

$$T = T_0 \operatorname{erf} \left[\frac{z}{2\sqrt{\kappa t}} \right]$$

che è definita nel seguente modo

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy$$

La funzione è tabulata e rappresentata nella figura seguente.

Il gradiente di temperatura si ottiene differenziando rispetto a z

$$\partial T / \partial z = \frac{\partial}{\partial z} \left[T_0 \operatorname{erf} \left(\frac{z}{2\sqrt{\kappa t}} \right) \right]$$

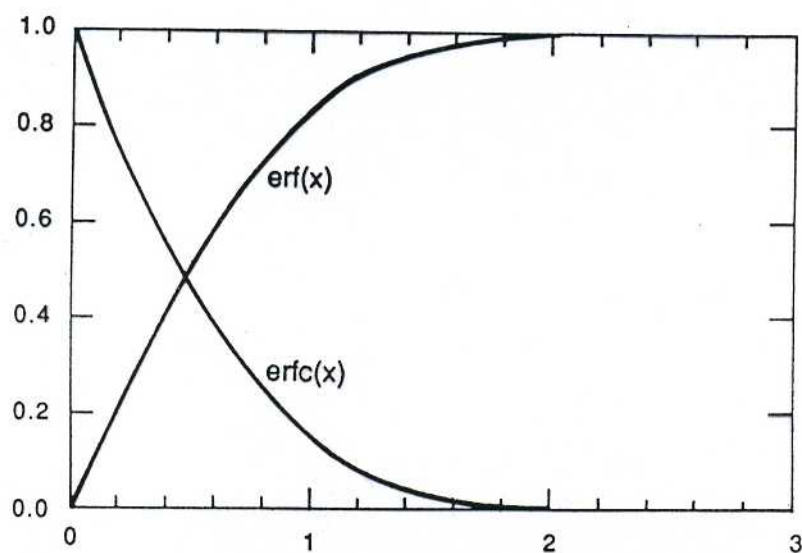
$$= T_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2\sqrt{\kappa t}} e^{-\frac{z^2}{4\kappa t}}$$

$$= \frac{T_0}{\sqrt{\pi \kappa t}} e^{-\frac{z^2}{4\kappa t}}$$

La soluzione può essere applicata a vari problemi geologici.

Table A5.1. *The error function*

x	$\text{erf}(x)$
0	0
0.05	0.056372
0.10	0.112463
0.15	0.167996
0.20	0.222703
0.25	0.276326
0.30	0.328627
0.35	0.379382
0.40	0.428392
0.45	0.475482
0.50	0.520500
0.55	0.563323
0.60	0.603856
0.65	0.642029
0.70	0.677801
0.75	0.711156
0.80	0.742101
0.85	0.770668
0.90	0.796908
0.95	0.820891
1.00	0.842701
1.1	0.880205
1.2	0.910314
1.3	0.934008
1.4	0.952285
1.5	0.966105
1.6	0.976348
1.7	0.983790
1.8	0.989091
1.9	0.992790
2.0	0.995322
2.5	0.999593
3.0	0.999978



Perdite di calore su scala mondiale

Attualmente è stimata in $4.2 \times 10^{13} \text{ W}$. Il 73% è perduto attraverso gli oceani (che rappresentano il 60% della superficie terrestre). La maggior parte della perdita è dovuta alla convezione ed al raffreddamento della litosfera oceanica che si allontana dalle dorsali.

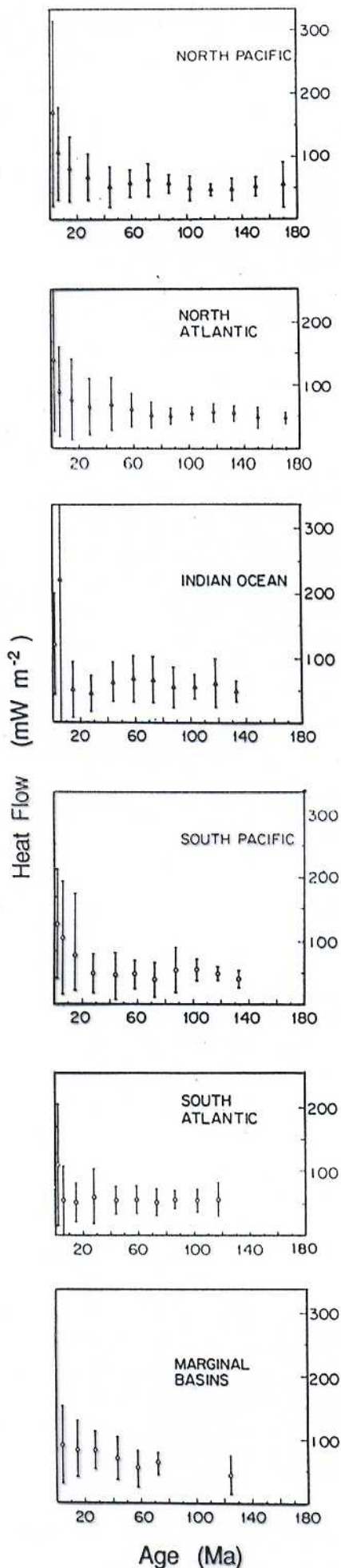
La tettonica a zolle è pertanto primariamente dovuta alla Terra che si raffredda: il tasso medio di generazione delle zolle è determinato da un equilibrio tra calore totale generato all'interno e calore rilasciato attraverso la superficie.

Nell'Archeano ($> 2500 \text{ Ma}$) si pensa la Terra fosse molto più calda e di conseguenza le zolle si muovevano molto più velocemente ($\sim 50 \text{ cm/a}$). Il maggior calore era dovuto non solo alla maggiore produzione radioattiva (da 3 a 4x maggiore), ma anche alla radioattività ^{26}Al , molto energetica e di breve durata, ed all'energia gravitazionale dissipata durante l'accrezione della Terra.

I valori del flusso di calore dipendono dall'età della crosta sottostante: negli oceani i valori maggiori si trovano lungo le dorsali, quelli minori nei bacini oceanici profondi; nei continenti i valori maggiori si riscontrano in regioni ad attività tettonica recente, quelli minori nelle regioni stabili (scudi precambriani).

	Superficie (10^6 km^2)	Flusso calore medio (10^{-8} W m^{-2})	Calore perso (10^{12} W)
Continenti e margini continentali	201	57	11.6
Oceani e bacini	309	99	30.4
TOTALE	510	82	42.0

FLUSSO DI CALORE OCEANICO

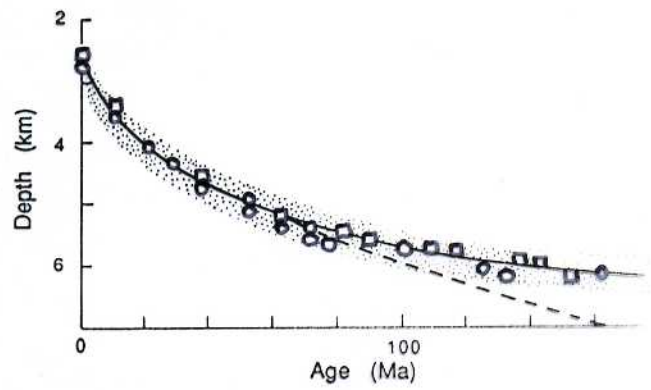
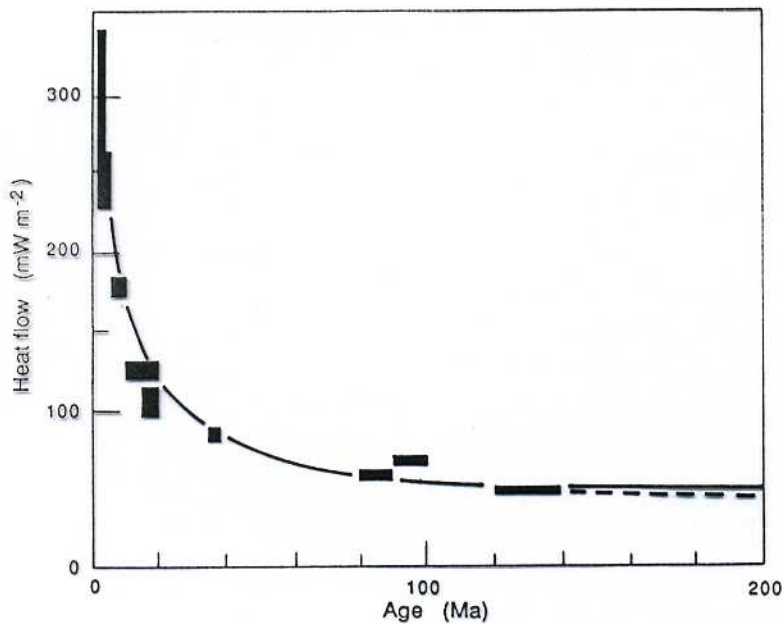


A sinistra è plottato il flusso di calore medio negli oceani e bacini verso l'età della litosfera oceanica corrispondente. I valori maggiori (ma con barre di errore grandi) si trovano nelle parti oceaniche giovani, mentre i valori più bassi (e più precisi) nelle parti vecchie.

La notevole dispersione in prossimità delle dorsali è dovuta a misure imprecise a causa della **circolazione idrotermica** dell'acqua marina attraverso la crosta (il repentino raffreddamento di magma provoca contrazione e fratture attraverso le quali entra l'acqua e raffredda il mezzo).

D'altro canto i sedimenti dei mari profondi sono poco permeabili e, con uno spessore sufficiente, diventano facilmente impermeabili all'acqua.

Nelle parti oceaniche con elevata sedimentazione (più vecchie!), le misure sono più precise.



Flusso di calore medio per aree ben sedimentate del Nord Pacifico e Nord Atlantico, plottato verso l'età. Curva solida: valore predetto dal modello a piastra; curva tratteggiata: valore predetto dal modello con strato termico di confine.

Profondità media per le Nord Atlantico (quadrati) e le Nord Pacifico (cerchi) plottata verso l'età. I puntini indicano la dispersione. La curva solida e tratteggiata indicano i valori predetti dal modello a piastra e dal modello con strato termico di confine.

Plottando solo i valori provenienti da zone oceaniche ben sedimentate, le osservazioni concordano con le stime teoriche. Raffreddandosi la zolla oceanica aumenta la densità e, se compensata isostaticamente, aumenta la profondità degli oceani con l'età. Si osservano semplici leggi empiriche:

$$\text{Età} < 70 \text{ Ma} \quad d = 2.5 + 0.35 t^{1/2}$$

$$\text{Età} > 70 \text{ Ma} \quad d = 6.4 - 3.2 \exp(-t/62.8)$$

con d profondità batimetrica in km e t età in Ma.

Una relazione empirica simile vale per il flusso di calore:

$$\text{Età} < 120 \text{ Ma} \quad q = 473 t^{-1/2}$$

$$\text{Età} > 120 \text{ Ma} \quad q = 33.5 + 67 \exp(-t/62.8)$$

con q flusso di calore in 10^{-3} W m^{-2} e t età in Ma.

MODELLI DI GENERAZIONE E RAFFREDDAMENTO DELLE ZOLLE

Semispazio in raffreddamento

Assumiamo la litosfera sia astenosfera raffreddata, ma ci sia generazione di calore, alla dorsale la temperatura sia $T = T_a$, alla superficie libera $T = 0$. Supponiamo inoltre il tutto in equilibrio termico.

Poiché le zolle si muovono, dobbiamo considerare l'equazione della conduzione in 2-D in un mezzo in moto (advezione!). Ciò porta ad avere due termini nella derivata temporale della temperatura

$$\frac{\partial T}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} u_x$$

Più in generale

$$\frac{\partial T}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} T$$

Assumendo la dorsale infinita lungo y e la conduzione orizzontale trascurabile rispetto a quella verticale, l'equazione da risolvere si riduce a:

$$\frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = u \frac{\partial T}{\partial x}$$

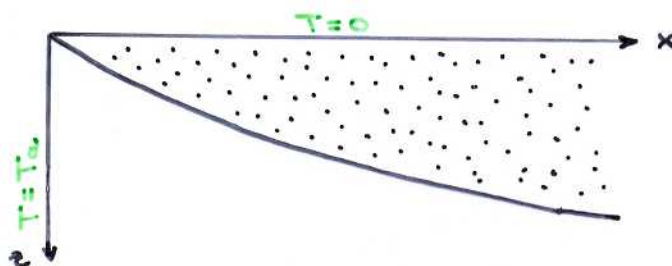
L'equazione si riduce a quella della diffusione scrivendo $\frac{x}{u} = t$. Per le condizioni iniziali date la soluzione è

$$T(z, t) = T_a \operatorname{erf} \left[\frac{z}{2\sqrt{\kappa t}} \right]$$

Il flusso di calore in superficie ($z=0$) sarà pertanto

$$\begin{aligned} q(t) &= -k \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} \\ &= -\frac{k T_a}{\sqrt{\pi \kappa t}} \end{aligned}$$

Vediamo che la dipendenza da $t^{-1/2}$ è confermata da tale modello.



Dalla soluzione ottenuta possiamo stimare lo spessore litosferico L , se specifichiamo la temperatura alla base della litosfera.

Assumendo $T = 1100^\circ\text{C}$ la temperatura alla base della litosfera e $T_a = 1300^\circ\text{C}$ la temperatura alla dorsale, bisogna trovare una combinazione di L e t tale che

$$1100 = 1300 \operatorname{erf} \left[\frac{L}{2\sqrt{\kappa t}} \right]$$

$$0.846 = \operatorname{erf} \left[\frac{L}{2\sqrt{\kappa t}} \right]$$

$$1.008 = \frac{L}{2\sqrt{\kappa t}}$$

Assumendo $\kappa = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ricaviamo

$$L = 11 \sqrt{t}$$

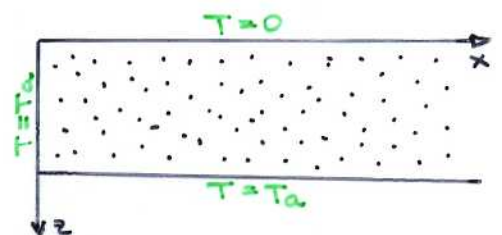
con L in chilometri e t in milioni di anni. Così per $t = 10 \text{ Ma}$ si ottiene $L = 35 \text{ km}$, per $t = 80 \text{ Ma}$ si ottiene $L = 98 \text{ km}$.

Modello con strato di confine

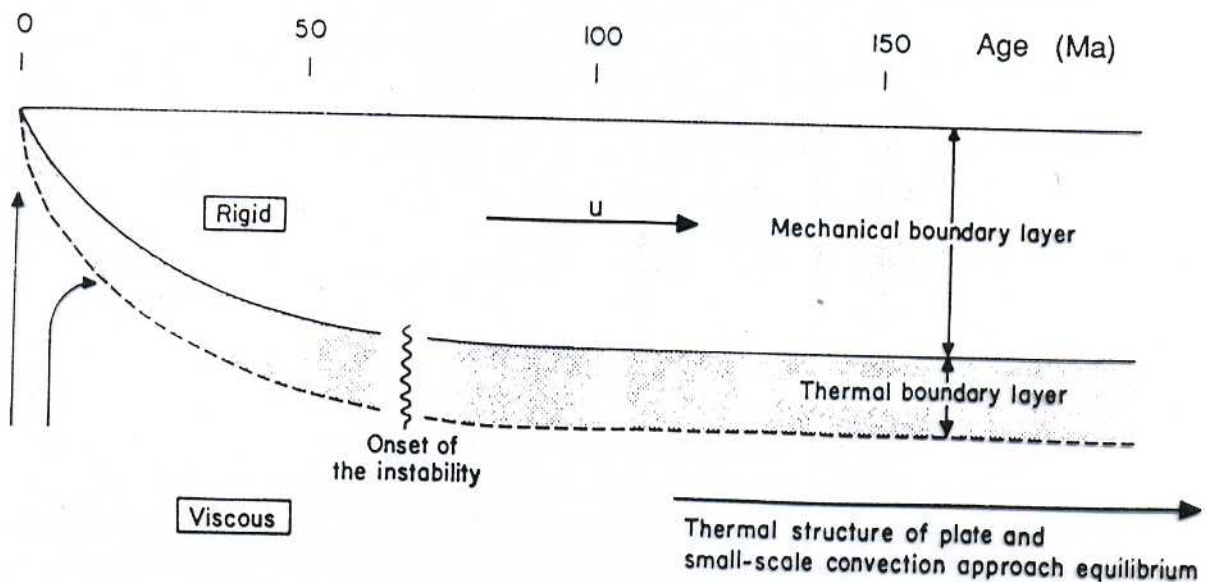
È una semplice variante del modello a semispazio. La base della litosfera è definita da una isoterma e lungo essa è specificato il flusso di calore dal mantello. Predice anche esso $d \sim t^{1/2}$ e $q \sim t^{-1/2}$.

Modello a piastra

La litosfera oceanica è considerata a spessore L costante; la base e la dorsale sono a temperatura T_a , la superficie a $T=0$.



Spiega le osservazioni. Le differenze con i modelli precedenti si riscontrano solo per $t > 70 \text{ Ma}$

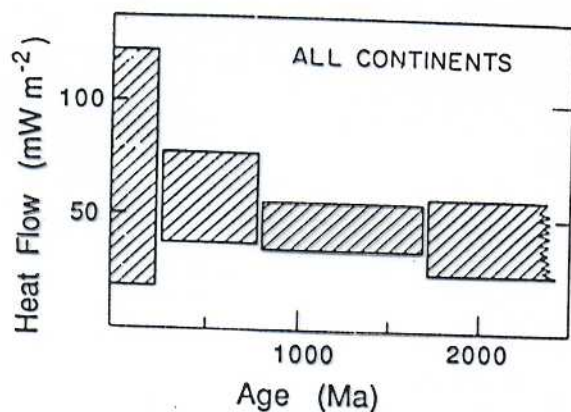


Nei modelli a strato di confine non c'è limite al raffreddamento e quindi limite per le profondità batimetriche. Nel modello a piastra invece per grandi t si raggiunge un equilibrio in accordo con le osservazioni (~ 90 km). Lo stesso vale per il flusso di calore che per $t > 140$ Ma si raggiunge un equilibrio nel modello a piastra. D'altro canto il modello a strato di confine è confermato da osservazioni sismologiche.

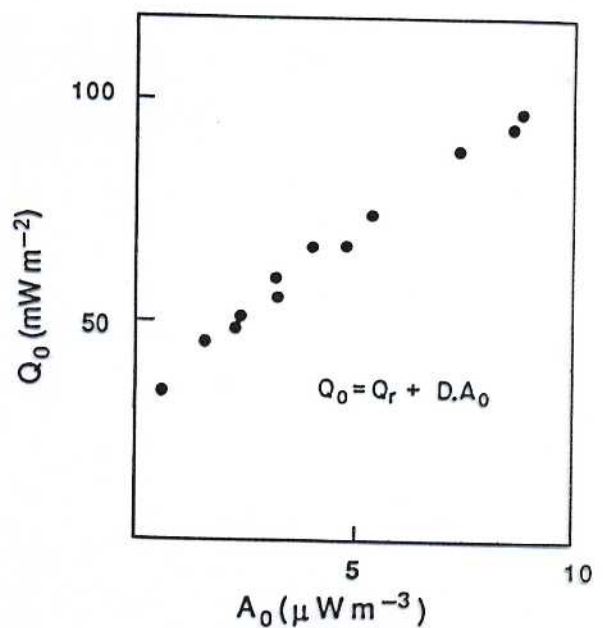
Il modello a strato di confine e le osservazioni si possono riconciliare, trovando un meccanismo che rallenti il raffreddamento per $t > 70$ Ma. Il meccanismo più ragionevole è quello di assumere delle celle di convezione a piccola scala sotto la base della litosfera nel cosiddetto **strato termico di confine (thermal boundary layer)**. Tale convezione porta ad un aumento del flusso di calore e porta ad uno spessore litostatico costante.

Sotto lo strato termico di confine il gradiente di temperatura è approssimativamente adiabatico.

FLUSSO DI CALORE CONTINENTALE



Flusso di calore verso l'età per le zone continentali.



Flusso di calore misurato Q_0 verso la generazione interna di calore (Stati Uniti orientali).

Il flusso di calore nei continenti è più difficile da capire. Esso è affetto da molti fattori transienti (erosioni, deposizioni, glaciazioni, concentrazioni locali di elementi radioattivi). I valori comunque decrescono con l'età: ciò potrebbe essere dovuto al raffreddamento ed ispessimento della litosfera come nei gli oceani, oppure che gli elementi radioattivi diminuiscono causa l'erosione. I valori per età minori di 800 Ma sono comunque molto difficili da interpretare.

In certe aree specifiche, dette **province di flusso di calore** esiste una relazione lineare empirica tra il flusso di calore misurato in superficie e la generazione radioattiva di calore, che permette di stimare il contributo di quest'ultima al flusso di calore:

$$Q_0 = Q_r + A_0 D$$

con Q_r e D costanti che caratterizzano una data provincia (e.g. $Q_r = 33 \text{ mW m}^{-2}$, $D = 7.5 \text{ km}$ nei gli Stati Uniti orientali).

la relazione empirica può essere spiegata da due diversi modelli.

MODELLO 1: la generazione di calore è uniforme e concentrata in una piastra di spessore D .

Dall'equazione di conduzione in condizioni di equilibrio

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = - \frac{A_0}{k} \quad 0 \leq z \leq D$$

otteniamo per integrazione

$$\frac{\partial T}{\partial z} = - \frac{A_0}{k} z + c$$

ove c è dato dalla $q_0 = k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = kc$; da cui $c = q_0/k$

Alla profondità D il flusso di calore verso l'alto risulta

$$q(D) = k \left[- \frac{A_0}{k} D + \frac{q_0}{k} \right] = -A_0 D + q_0 = q_r$$

In questo modello q_r viene interpretato come flusso di calore alla base della crosta, in quanto tutto il calore radioattivo si suppone prodotto nella piastra di spessore D .

MODELLO 2: la generazione di calore è una funzione esponenziale decrescente con la profondità entro una piastra di spessore z^* .

L'equazione da integrare stavolta è:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = - \frac{A(z)}{k} \quad \text{con} \quad A(z) = A_0 e^{-\frac{z}{D}} \quad 0 \leq z \leq z^*$$

Integrando otteniamo

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{A_0}{k} D e^{-z/D} + c$$

la costante c si determina assumendo un flusso di calore q_0 in superficie

$$q_0 = k \left[\frac{A_0 D}{k} + c \right]$$

da cui

$$c = \frac{1}{k} (q_0 - A_0 D)$$

alla profondità z^* (che può anche variare entro una provincia) il flusso di calore risulta

$$q(z^*) = A_0 D e^{-z^*/D} + q_0 - A_0 D$$

Eslicitando q_0 otteniamo

$$q_0 = q(z^*) + A_0 D - A_0 D e^{-z^*/D}$$

Annunciando

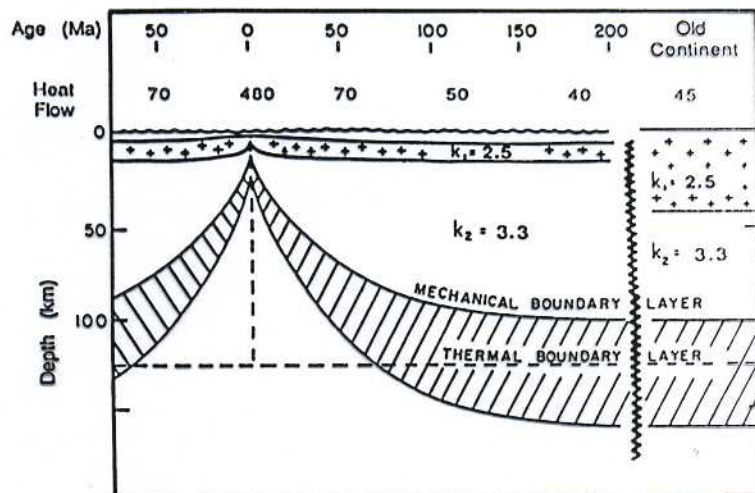
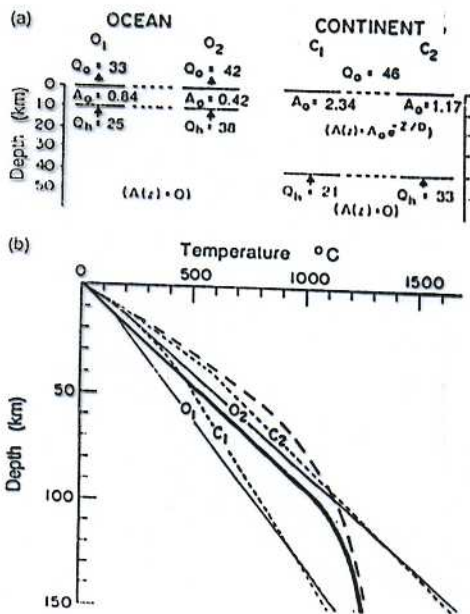
$$q(z^*) - A(z^*) D = q_r$$

ri troviamo l'equazione empirica.

Il modello 2 implica la relazione empirica lineare, e la produzione di calore $A(z^*)$ alla profondità z^* risulta costante (oppure trascurabilmente piccola).

Se $A(z^*) \neq 0$ il valore osservato q_r può essere ben diverso dal flusso di calore $q(z^*)$ alla base dello strato di spessore z^* .

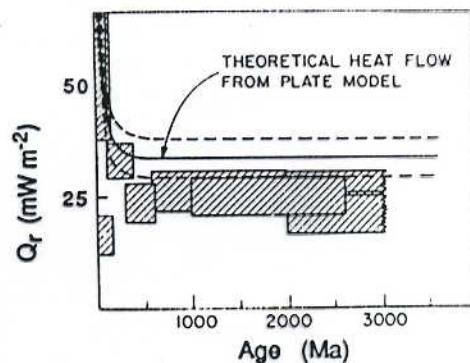
Si può inoltre dimostrare che, per piccoli valori di $A(z^*) D$ risulta $z^* > D$. In questo caso D dà una misura della migrazione verso l'alto degli isotopi radioattivi, mentre z^* è all'incirca lo spessore della crosta.



Modelli termici estremi per l'oceano (O₁, O₂) e il continente (C₁, C₂) e relative geotermie. Linea solida: geotermia per il modello a piastra. Linea tratteggiata: geotermia dalla funzione errore per zona di età.

Modelli termici per l'oceano e il continente. La linea tratteggiata indica lo spessore litostorico predetto dal modello a piastra.

Flusso di calore ridotto in funzione dell'età



RIASSUMENDO:

- la maggior parte della variazione nel flusso di calore misurato in superficie è dovuta alla generazione di calore nella crosta;
- il flusso di calore ridotto q_r dà una minima ragionevole del flusso di calore alla base della crosta;
- per età > 300 Ma q_r è quasi costante e vale $q_r = 25 \times 10^{-3} \text{ W m}^{-2}$; tale valore è spiegato dal modello a piastra della litosfera oceanica.
- il confronto tra varie geotermie ottenute per diversi modelli (vedi figura sopra) e dalle conclusioni al punto 3 ci indica che non esistono grandi differenze tra la struttura termale della litosfera oceanica e quella continentale (sotto per 80 km di profondità). Tuttavia le disparità risultano dovute solo alla loro diversa età.

STRUTTURA TERMICA DEL MANTELLO

Si suppone che nel mantello la **convezione** gioca un ruolo primario nel trasferimento di calore, che pertanto avviene ad un ritmo più elevato che non per conduzione. Il gradiente di temperatura e le temperature risultano quindi molto più basse. All'interno di un fluido in convezione il gradiente di temperatura è circa **adiabatico**.

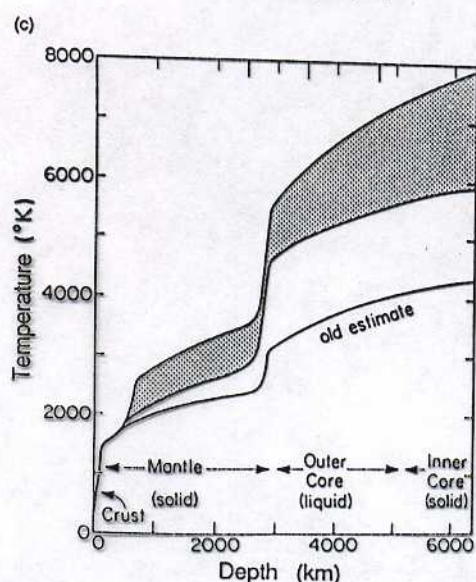
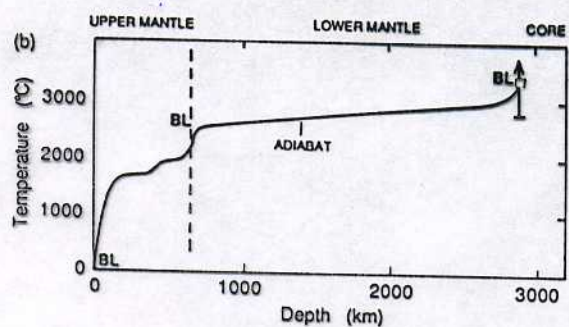
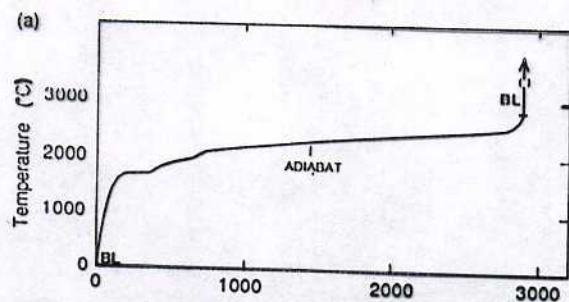
Per spiegare tale concetto consideriamo un'unità di roccia alla profondità z e alla temperatura T che improvvisamente risale alla profondità $z' < z$. Assumiamo l'unità di roccia sia un sistema chiuso (entropia costante) e consideriamo il cambio di temperatura. Nel raggiungere la posizione z' risulta più calda delle rocce circostanti; però prima si trovava a pressioni superiori e pertanto ora si espande e quindi si raffredda! La temperatura a cui si raffredda è quella delle rocce circostanti, allora il gradiente di temperatura della colonna di roccia è detto **adiabatico**.

Si può dimostrare che per un gradiente adiabatico la variazione di temperatura con il raggio terrestre r è dato da:

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_s = - \frac{T \alpha g}{c_p}$$

con α coefficiente di espansione termica.

Per il mantello superiore (astenosfera) il gradiente adiabatico di temperatura risulta circa $0.5^\circ\text{C}/\text{km}$ [assumendo i valori $T = 1573\text{K}$, $\alpha = 3 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$, $c_p = 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$]. A profondità più elevate nel mantello (α più piccolo, g più piccolo), il gradiente termico si riduce a $0.3^\circ\text{C}/\text{km}$.



Modelli di profili di temperatura

- adiabata di mantello con uno strato termico di confine in superficie ed al confine nucleo-mantello
- adiabata di mantello con strato termico di confine sia all'inizio che alla fine del mantello inferiore (assunto come sistema separato dal mantello superiore)
- stima alternativa della temperatura nella Terra basata su esperimenti di laboratorio ad alte pressioni ed alte temperature su campioni di ferro.

STRUTTURA TERMICA DEL NUCLEO

Per stimare il gradiente di temperatura nel nucleo esterno possiamo

usare il gradiente termico adiabatico, che per valori di $T = 5773 \text{ K}$, $\alpha = 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, $g = 5 \text{ m s}^{-2}$, $c_p = 5 \times 10^2 \text{ J kg}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ ci dà il valore di $0.6 \text{ } ^\circ\text{C/km}$. A causa delle scarse conoscenze delle proprietà fisiche del nucleo esterno, la stima è affetta da un errore di $\pm 0.3 \text{ } ^\circ\text{C/km}$.

Una stima della pressione al confine nucleo-mantello è di 136 GPa , di quella al centro della Terra di 360 GPa . Le stime della temperatura al centro della Terra risultano pertanto essere di $6600 \text{ } ^\circ\text{C} \pm 1000 \text{ } ^\circ\text{C}$.