

## EQUAZIONI DEL MOTI

Considerando l'equilibrio di un parallelepipedo per traslazioni abbiamo visto che la risultante delle forze elastiche agenti lungo l'asse  $x$  è:

$$\left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz$$

ed espressioni analoghe per le forze lungo gli assi  $y$  e  $z$ .

Usando la seconda legge di Newton, possiamo uguagliare tale forza alla massa volte l'accelerazione

$$\left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz = \rho dx dy dz \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

con  $\rho$  la densità del parallelepipedo e  $u$  la componente lungo  $x$  dello spostamento. Assumiamo che le altre forze (gravità) non varino apprezzabilmente attraverso il parallelepipedo. L'equazione si semplifica esprimendo gli sforzi in termini di deformazioni e le deformazioni in termini di spostamenti.

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (\lambda \Delta + 2\mu e_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (2\mu e_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z} (2\mu e_{zx})$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (\lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mu [\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}]) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu [\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}])$$

Assumiamo ora uno spazio omogeneo, cioè  $\mu$  e  $\lambda$  costanti nello spazio. Allora:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \lambda \frac{\partial \Delta}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ &= \lambda \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ &= (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u \end{aligned}$$

Analogamente le componenti delle forze lungo  $y$  e  $z$  porteranno alle equazioni per  $v$  e  $w$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w$$

Usando la notazione tensoriale o vettoriale possiamo riscrivere le tre equazioni come

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 u_i$$

$$\rho \underline{\ddot{u}} = (\lambda + \mu) \underline{\nabla} \Delta + \mu \nabla^2 \underline{u}$$

Ricordiamo ancora che queste equazioni valgono per un disturbo generale che si propaga in un mezzo omogeneo, isotropo, perfettamente elastico assumendo deformazioni infinitesime e assenza di forze di corpo (gravità ovvero forze che descrivono la sorgente sismica!).

Riscriviamo ora queste equazioni in un'altra forma che ci permetterà di capire le due forme di propagazione di un disturbo attraverso un corpo solido elastico.

Deriviamo parzialmente rispetto ad  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , rispettivamente, le equazioni per  $u$ ,  $v$ ,  $w$ :

$$\rho \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x^2} + \mu \nabla^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

$$\rho \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \Delta}{\partial y^2} + \mu \nabla^2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$\rho \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \Delta}{\partial z^2} + \mu \nabla^2 \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

Sommando le tre equazioni si ottiene:



$$(\lambda + \mu) \left[ \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial z^2} \right] + \mu \nabla^2 \Delta = \rho \frac{d^2 \Delta}{dt^2}$$

$$(\lambda + \mu) \nabla^2 \Delta + \mu \nabla^2 \Delta = \rho \frac{d^2 \Delta}{dt^2}$$

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \Delta = \rho \frac{d^2 \Delta}{dt^2}$$

$$\boxed{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \nabla^2 \Delta = \frac{d^2 \Delta}{dt^2}}$$

Otteniamo in questo modo un'equazione d'onda che descrive la propagazione di una dilatazione cubica  $\Delta$ . Questo tipo di onda viene detto **ONDA P** e si propaga con la velocità  $\alpha$  data da

$$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

Proviamo ora a derivare parzialmente rispetto ad  $y$  l'equazione per  $u$  e rispetto ad  $x$  quella per  $v$ :

$$\rho \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x \partial y} + \mu \nabla^2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\rho \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x \partial y} + \mu \nabla^2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Sottraendo le due equazioni si elimina il termine contenente la dilatazione cubica

$$\rho \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \mu \nabla^2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

In modo analogo ritroviamo anche

$$\rho \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \mu \nabla^2 \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\rho \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \mu \nabla^2 \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

Ricordando che, ad es.,  $\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 2\theta_z$  rappresenta una rotazione nel piano  $x-y$  e che  $2\theta_z = (\nabla \times \underline{u})_z$ , cioè la componente  $z$  del rotore degli spostamenti, possiamo riscrivere le ultime tre equazioni in modo elegante come

$$\mu \nabla^2 (\nabla \times \underline{u}) = \rho \frac{d^2}{dt^2} (\nabla \times \underline{u})$$

$$\boxed{\frac{\mu}{\rho} \nabla^2 (\nabla \times \underline{u}) = \frac{d^2}{dt^2} (\nabla \times \underline{u})}$$

Otteniamo un'equazione d'onda che descrive la propagazione di un disturbo rotazionale  $\nabla \times \underline{u}$ . Questo tipo di onda non comporta variazioni di volume, è detta **ONDA S** e si propaga con una velocità  $\beta$  data da

$$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

Chiaramente risulta  $\beta < \alpha$ , per cui le onde P (onde primarie) che si propagano da una data sorgente, arriveranno in una certa stazione prima delle onde S (onde secondarie).

Matematicamente risulta più conveniente esprimere il campo vettoriale degli spostamenti con un potenziale scalare  $\varphi$  ed uno vettoriale  $\Psi$  (vedi dispenne sui campi!)

$$\underline{u} = \nabla \varphi + \nabla \times \underline{\Psi}$$

con la condizione che  $\nabla \cdot \underline{\Psi} = 0$ . Lo spostamento dovuto all'onda P si calcola dal potenziale scalare, quello legato all'onda S da quello vettoriale (che ha due componenti, le onde SV polarizzate verticalmente e le onde SH polarizzate orizzontalmente).

Prendendo l'equazione per le onde P, ricordando che  $\Delta = \nabla \cdot \underline{u}$  ed esprimendo  $\underline{u}$  con i potenziali, troviamo

$$\frac{d^2}{dt^2} [\nabla \cdot (\nabla \varphi + \nabla \times \underline{\psi})] = \alpha^2 \nabla^2 [\nabla \cdot (\nabla \varphi + \nabla \times \underline{\psi})]$$

Ricordando che  $\nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi$  e che  $\nabla \cdot (\nabla \times \underline{\psi}) = 0$  si ottiene

$$\frac{d^2}{dt^2} \nabla^2 \varphi = \alpha^2 \nabla^2 (\nabla^2 \varphi)$$

$$\nabla^2 \left[ \frac{d^2}{dt^2} \varphi = \alpha^2 \nabla^2 \varphi \right]$$

$$\boxed{\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \alpha^2 \nabla^2 \varphi}$$

che rappresenta un'equazione d'onda per il potenziale scalare  $\varphi$ . Tale scalare, come si vede anche dalla velocità  $\alpha$ , è associato all'onda P. Lo spostamento dell'onda P si ottiene prendendo il gradiente di questo potenziale:

$$\underline{u}^P = \nabla \varphi = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$$

In modo analogo dall'equazione delle onde S si ottiene un'equazione d'onda per il potenziale vettore  $\underline{\psi}$ , che è associato all'onda S:

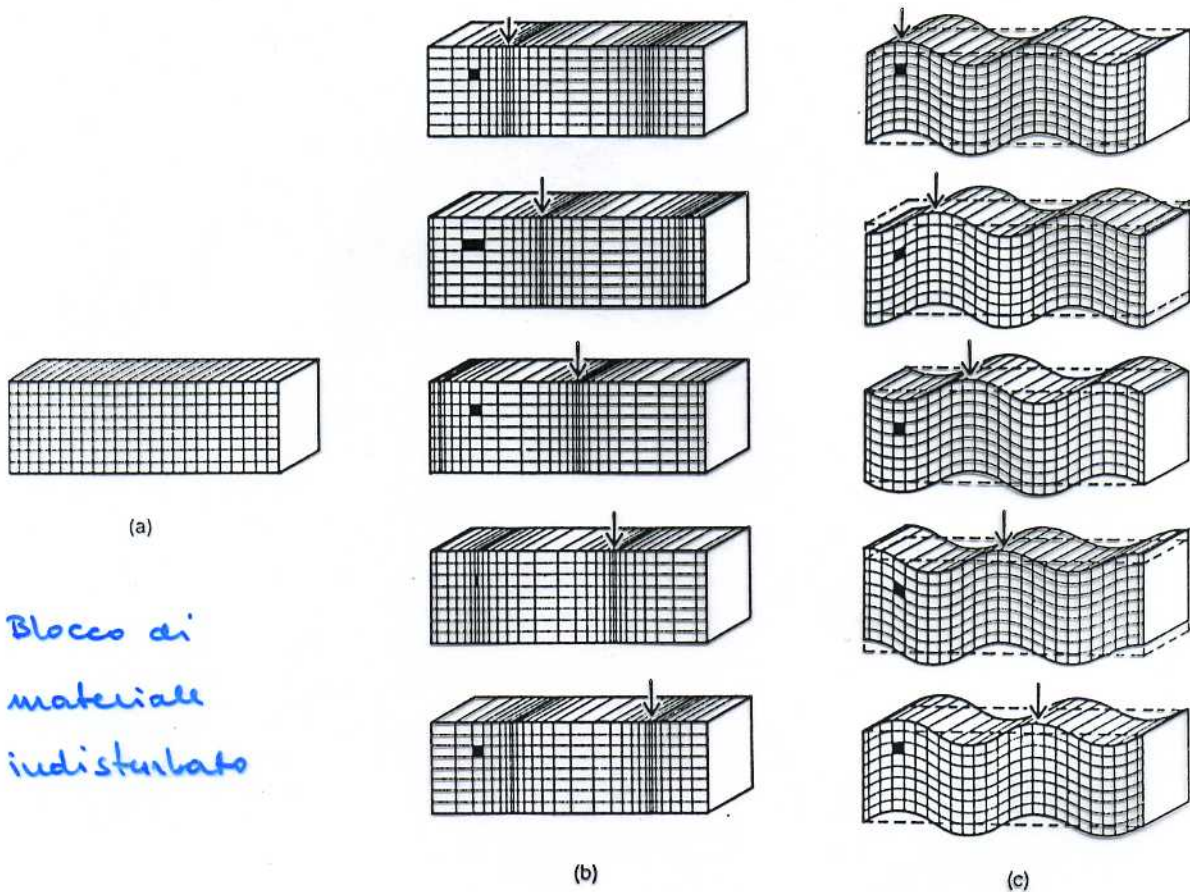
$$\boxed{\frac{d^2 \underline{\psi}}{dt^2} = \beta^2 \nabla^2 \underline{\psi}}$$

e lo spostamento dell'onda S si ottiene prendendo il rotore del potenziale  $\underline{\psi}$ :

$$\underline{u}^S = \nabla \times \underline{\psi}$$



## ONDE P ED S



### b) Onda P - compressioni e dilatazioni

Un piccolo elemento di volume cambia sia volume che forma al passaggio dell'onda. Il moto della particella avviene lungo la direzione di propagazione dell'onda.

### c) Onda S - la regione si deforma con rotazioni senza variazioni di volume. Viene rappresentato il moto SV. Il moto SH è uguale a questo, ma giace nel piano orizzontale (si muove la figura di $90^\circ$ attorno all'asse diretto lungo la propagazione dell'onda).

Il moto della particella è sempre perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda.

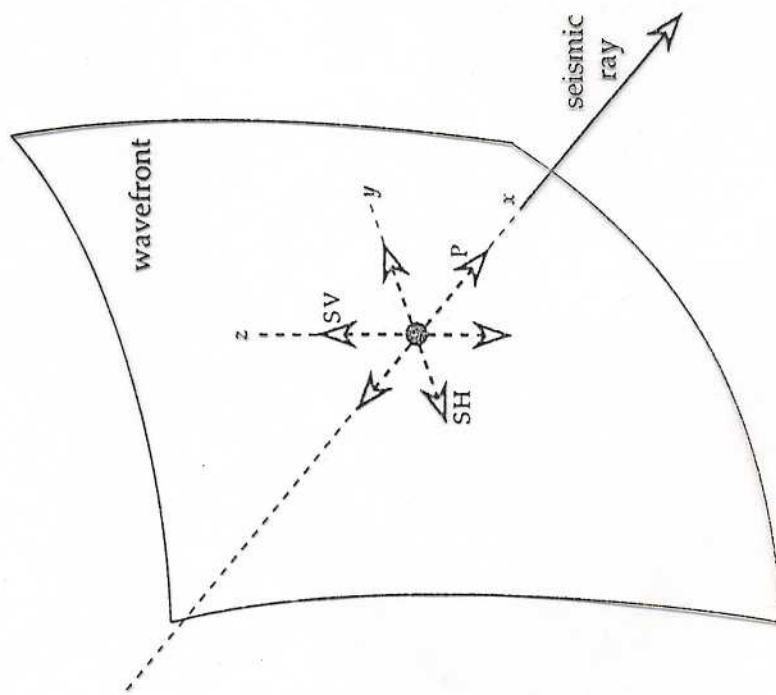


Fig. 3.10 Representation of a generalized vibration as components parallel to three orthogonal reference axes. Particle motion in the  $x$ -direction is back and forth parallel to the direction of propagation, corresponding to the P-wave. Vibrations along the  $y$ - and  $z$ -axes are in the plane of the wavefront and normal to the direction of propagation. The  $z$ -vibration in a vertical plane corresponds to the SV-wave; the  $y$ -vibration is horizontal and corresponds to the SH-wave.

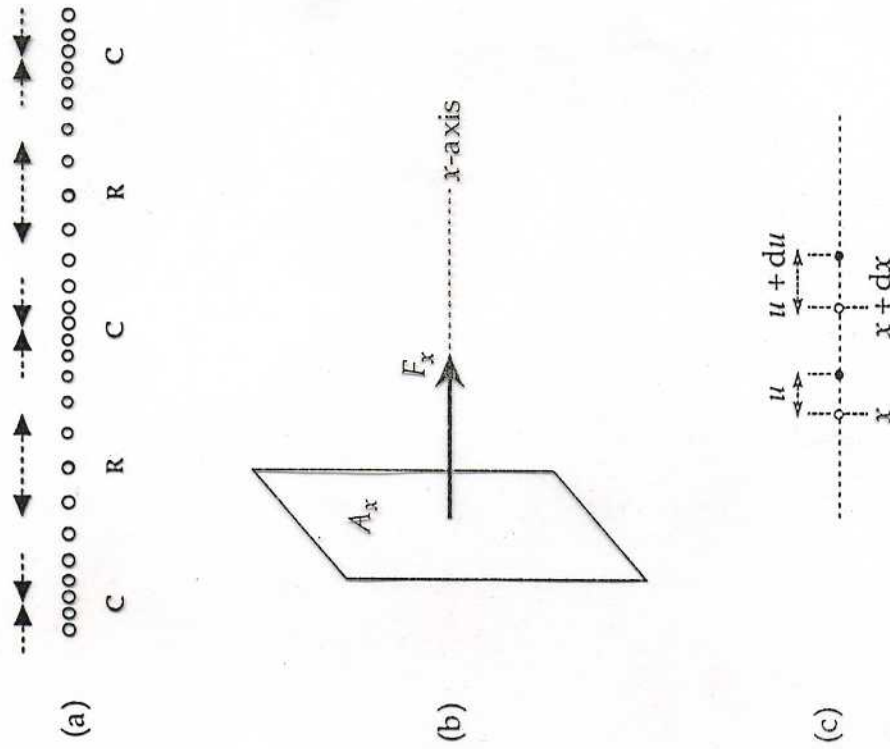
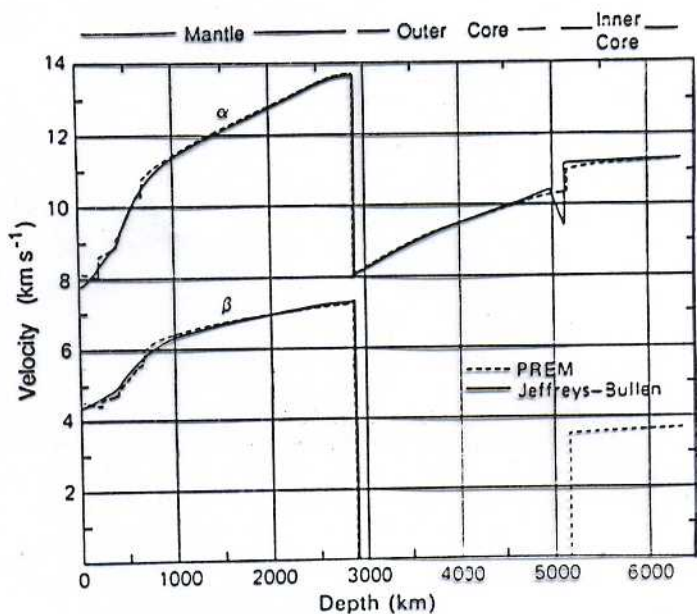
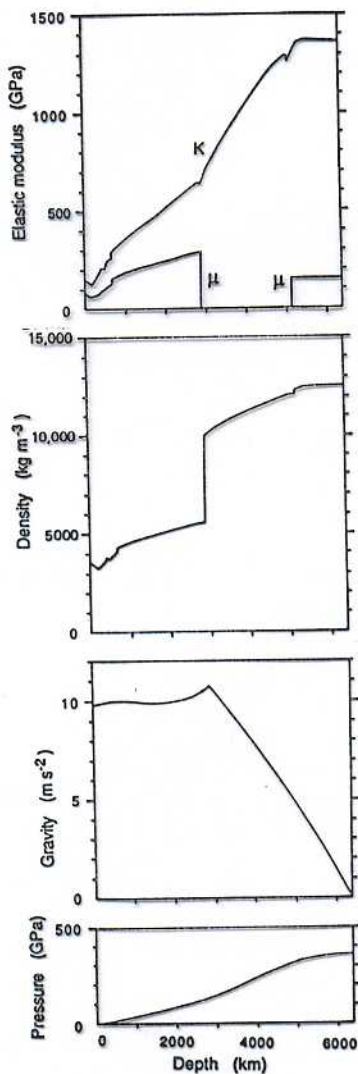


Fig. 3.11 (a) The particle motion in a one-dimensional P-wave transmits energy as a sequence of rarefactions (R) and condensations (C) parallel to the  $x$ -axis. (b) Within the wavefront the component of force  $F_x$  in the  $x$ -direction of propagation is distributed over an element of area  $A_x$  normal to the  $x$ -axis. (c) A particle at position  $x$  experiences a longitudinal displacement  $u$  in the  $x$ -direction, while at the nearby position  $x + dx$  the corresponding displacement is  $u + du$ .





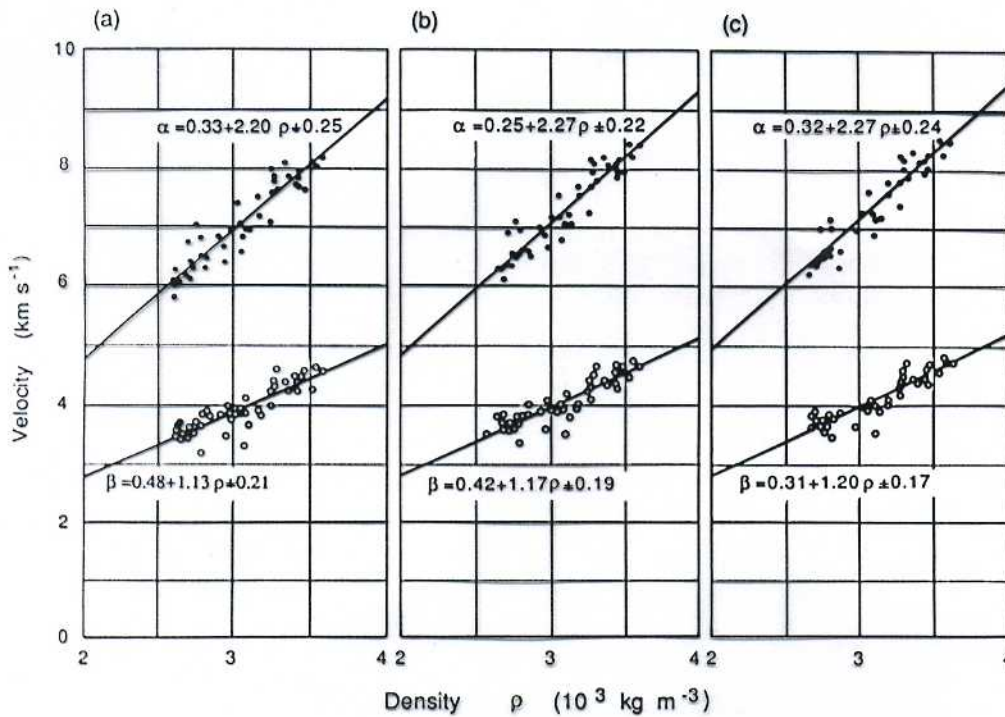
- ↑ Variazione della velocità delle onde sismiche con la profondità per due modelli elastici della Terra.
- ← Variazione del modulo di incompressibilità  $K$ , del modulo di rigidità  $\mu$ , della densità  $\rho$ , della gravità  $g$  e della pressione  $p$  con la profondità.

La velocità delle onde sismiche aumenta all'aumentare dei parametri di Lamé. Ha loro dipendenza dalla densità invece non è ovvia come potrebbe sembrare: in effetti rocce a densità più alta hanno velocità maggiori. Empiricamente si trova che la relazione è approssimativamente lineare per rocce medie della crosta e del mantello superiore.

$$v = a\rho + b$$

La relazione è detta **legge di BIRCH**. Per rocce sedimentarie la relazione non è più valida e va usata la curva empirica di **NAPE-DRAKE**.





$$v = a\rho + b$$

LEGGE DI BIRCH

CURVA DI  
NAFE-DRAKE

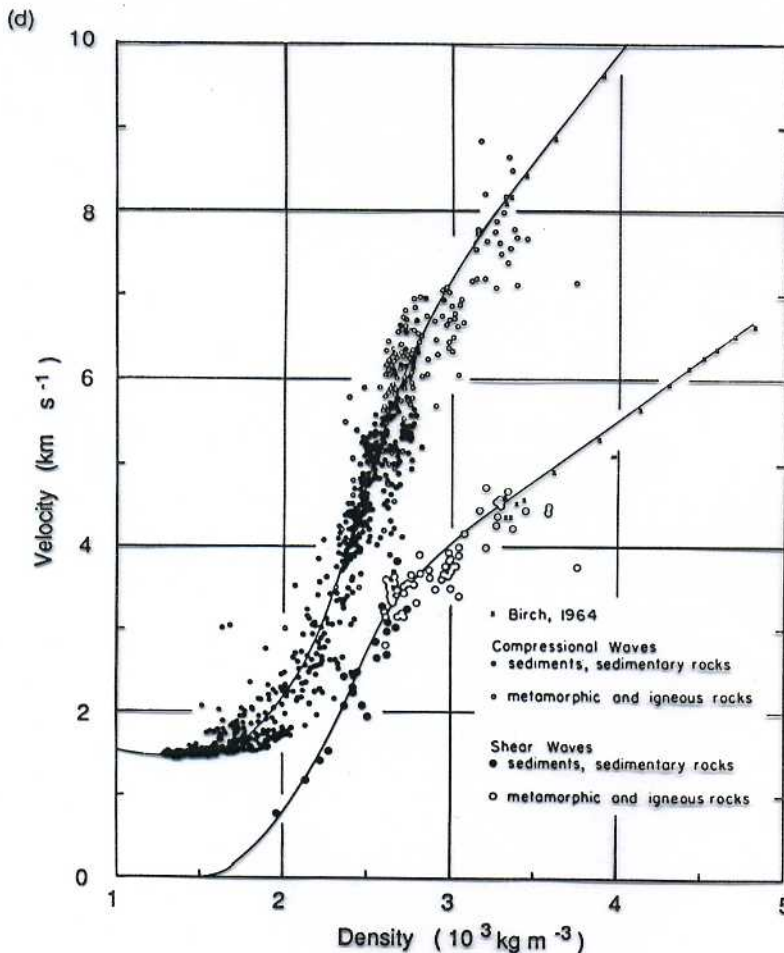


Figure 4.2. (a)–(c) Examples of the essentially linear relationship between seismic velocities and density known as Birch's law. Laboratory measurements made on crustal rocks at confining pressures of (a) 0.2 GPa, (b) 0.6 GPa and (c) 1.0 GPa, which correspond to approximate depths of 6, 18 and 30 km. (1 GPa is 10<sup>9</sup> pascal. The pascal, a unit of pressure, is equal to 1 newton per square metre: 1 Pa = 1 N m<sup>-2</sup>. A unit of pressure still often used today is the bar: 1 bar = 10<sup>6</sup> dyne cm<sup>-2</sup>. Thus, 1 GPa = 10<sup>4</sup> bar = 10 kbar.) (After Gebrande 1982.) (d) Relationship between seismic velocities and density referred to as the Nafe-Drake curve after its originators. Open circles, values for igneous and metamorphic rocks; solid circles, values for sedimentary rocks; crosses show a linear model from Birch 1964. (After Ludwig et al. 1970.)

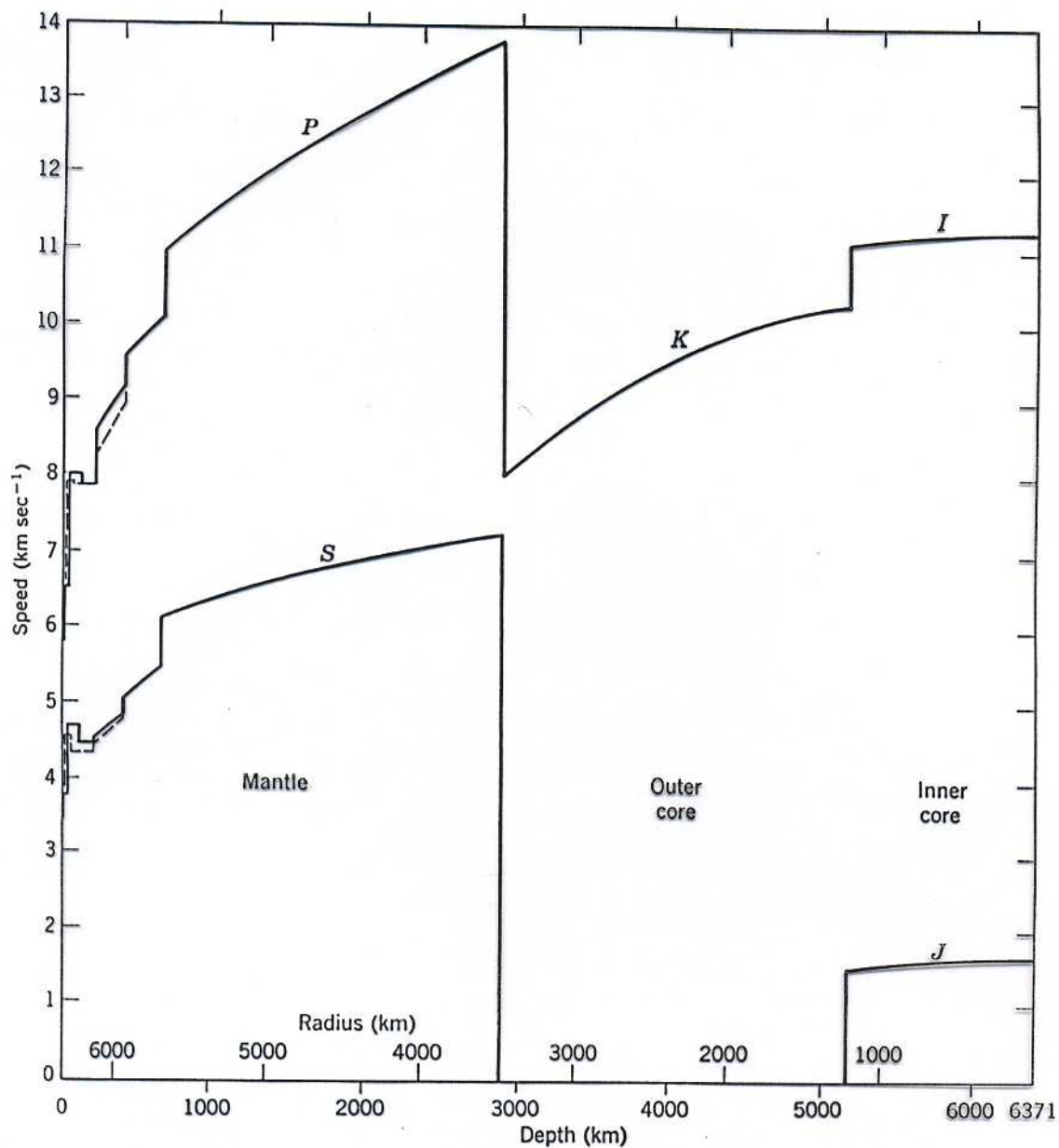


Figure 6.14. Velocities of body waves (*P* and *S*) within the Earth. Data for the earth model by Dziewonski et al. (1975)—see Appendix G.



## ONDE PIANE

Prendiamo l'equazione d'onda per il potenziale scalare e consideriamo solamente la componente lungo  $x$ :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Questa è un'equazione d'onda in una dimensione e la sua soluzione è una qualunque funzione, le cui variabili  $x$  e  $t$  sono legate tra di loro come segue

$$f(x \pm \alpha t)$$

come è facile dimostrare prendendo le rispettive derivate parziali.

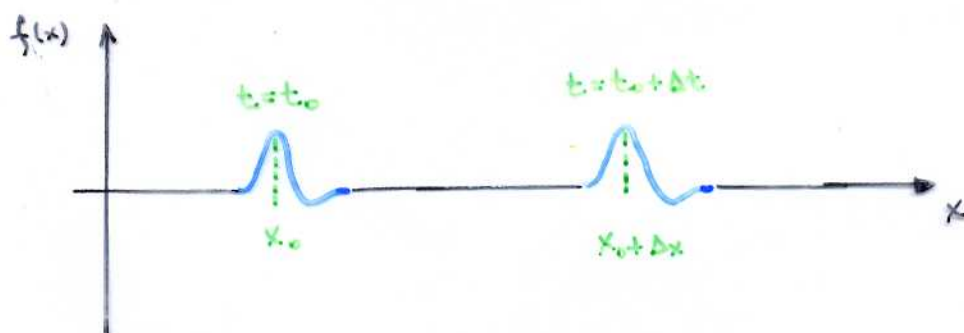
Poiché qualunque funzione continua è esprimibile matematicamente come una somma infinita di seni e coseni

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nkx + b_n \sin nkx)$$

possiamo esprimere la soluzione dell'equazione d'onda mono-dimensionale come

$$\psi = A \cos k(x - \alpha t)$$

Il potenziale avrà lo stesso valore in tutti i punti  $x$  e  $t$  per cui  $x = \alpha t$ : cioè in tutti i punti di un piano  $y-z$  perpendicolare all'asse  $x$ , che si muove lungo l'asse  $x$  positivo con velocità  $\alpha$ . Pertanto questo tipo di onda è detta **onda piana**.  
La quantità  $x - \alpha t$  è detta **fase** dell'onda.



la superficie (piana in questo caso) su cui la fase è la stessa (e quindi lo stesso disturbo) viene detta **fronte d'onda**.

L'onda viaggia in direzione perpendicolare al fronte d'onda e tale direzione prende il nome di **raggio d'onda**.

Se la fase è del tipo  $x - \alpha t$ , l'onda si propagerà nella direzione  $x$  positiva, e invece è del tipo  $x + \alpha t$ , la propagazione sarà nella direzione  $x$  negativa.

Chiaramente

$$-A \leq \varphi \leq A$$

e quindi  $A$  è detto **ampiezza dell'onda**.

Esaminiamo il comportamento di  $\varphi$  tenendo fissa una delle due variabili.

Per  $t = \text{cost.}$   $\rightarrow \varphi = \varphi(x)$  e la funzione coseno assumerà valori uguali per multipli di  $kx$ :

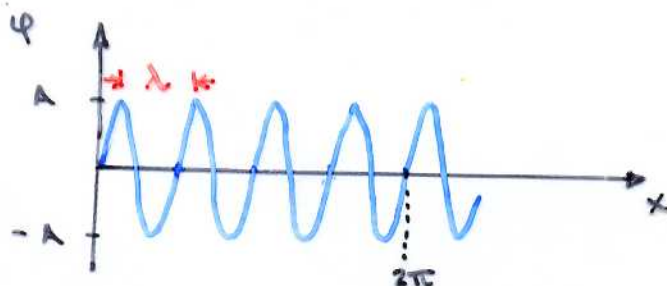
$$\varphi = A \cos(kx + \text{cost.})$$

$$kx = 2\pi \cdot n$$

da cui segue che la fase si ripete ogni intervallo spaziale di

$$x = \frac{2\pi}{k} \equiv \lambda$$

Tale intervallo si indica con  $\lambda$  e si chiama **lunghezza d'onda**. D'altro canto  $k$  si dice **numero d'onda** e da il numero di lunghezze d'onda nell'intervallo  $2\pi$ .



$$\lambda = \frac{\pi}{2}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 4$$



Generalizzando a 3 dimensioni, il potenziale sarà dato da

$$\varphi = A \cos(\underline{k} \cdot \underline{x} - |\underline{k}| \alpha t)$$

In questo caso  $\underline{k}$  è un vettore che è orientato nella direzione di propagazione dell'onda!

Prendiamo ora  $x = \cos t$ .  $\rightarrow \varphi = \varphi(t)$  e la funzione coseno assumerà valori uguali per multipli di  $k \alpha t$ :

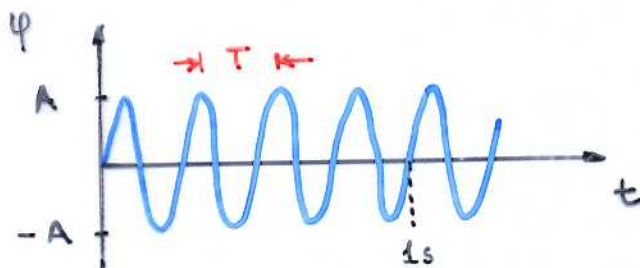
$$\varphi = A \cos(\cos t - k \alpha t)$$

$$k \alpha t = 2\pi \cdot n$$

da cui segue che la fase avrà lo stesso valore dopo un intervallo temporale

$$t = \frac{2\pi}{k \alpha} = T$$

Tale intervallo viene detto **periodo** dell'onda, mentre  $\frac{1}{T} = f$  è detta **frequenza** dell'onda, e ci dà il numero di oscillazioni nell'unità di tempo.



$$T = \frac{1}{4} \text{ s}$$

$$f = 4 \text{ s}^{-1} = 4 \text{ Hz}$$

La quantità  $k \alpha$  è detta anche **frequenza angolare**  $\omega$ .

Sarà pertanto

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\lambda}{\alpha}$$

$$\omega = 2\pi f = k \alpha$$

e possiamo riscrivere  $\varphi$  come

$$\varphi = A \cos(kx - \omega t)$$

Per ottenere gli spostamenti delle particelle relativi al passaggio dell'onda  $P$  prendiamo il gradiente del potenziale scalare  $\varphi$

$$\begin{aligned}\underline{u}^P &= \underline{\nabla} \varphi \\ &= \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \\ &= (-Ak \sin k(x-\alpha t), 0, 0)\end{aligned}$$

La velocità  $\partial \underline{u}^P / \partial t$  sarà pertanto

$$\frac{\partial \underline{u}^P}{\partial t} = (A\alpha k^2 \cos k(x-\alpha t), 0, 0)$$

La **densità d'energia** di un'onda piana è definita come energia cinetica massima per unità di volume:

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{2} m v_{\max}^2 / V = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{\max}^2 \\ &= \frac{1}{2} \rho A^2 \alpha^2 k^4 \\ &= \frac{1}{2} \rho (Ak)^2 \omega^2\end{aligned}$$

Da notare che l'energia dell'onda è chiaramente proporzionale all'ampiezza della stessa, ma anche alla frequenza!

Un treno d'onde a bassa frequenza (periodi lunghi) ha quindi, a parità di ampiezza, meno energia di uno ad alta frequenza.

Abbiamo considerato finora una funzione coseno come soluzione dell'equazione d'onda e avremmo potuto considerare anche un seno. Risulta però particolarmente utile considerare una loro combinazione:

$$\begin{aligned}\varphi &= A' (\cos k(x-\alpha t) + i \sin k(x-\alpha t)) \\ &= A' \exp i \{kx - \omega t\}\end{aligned}$$



La funzione esponenziale è infatti facilmente derivabile e permette di formalizzare la dipendenza spaziale e quella temporale.

$$\psi = A' e^{i k x} e^{-i \omega t}$$

$$\underline{u}_p = \underline{\nabla} \psi = A' i \underline{k} e^{i(kx - \omega t)}$$

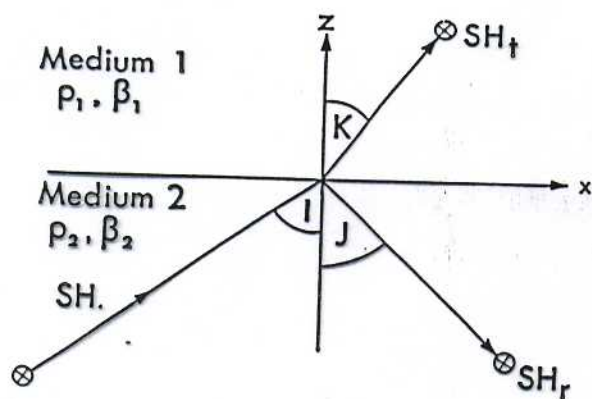
## RIFLESSIONI E RIFRAZIONI DI ONDE PIANE

Fino a adesso abbiamo considerato la propagazione di onde in mezzi omogenei spazialmente infiniti. Consideriamo ora cosa succede, se un'onda incide su un'interfaccia che separa due mezzi omogenei diversi. Se l'interfaccia salda i due mezzi, allora si dovrà avere continuità di spostamenti e sforzi attraverso essa - altrimenti si tenderebbe ad aprire un'intercapedine tra i due mezzi. L'altro tipo di interfaccia è quello tra un mezzo elastico ed il vuoto - come la superficie terrestre e viene detta superficie libera. Su tale superficie gli sforzi si annullano, e cioè avremo

$$\sigma_{zx} = \sigma_{zy} = \sigma_{zz} = 0$$

Vediamo come tali vincoli - detti anche condizioni di contorno - portano naturalmente alle leggi di riflessione e rifrazione. Consideriamo un'onda SH che incide con un angolo  $I$  su un'interfaccia separante due mezzi elastici: il primo caratterizzato da  $\rho_1, \beta_1$ , il secondo da  $\rho_2, \beta_2$ . Essendo il moto polarizzato orizzontalmente e normale alla direzione di propagazione, la parte di energia trasmessa e di quella riflessa saranno ancora polarizzate nello stesso modo - rimarranno cioè onde SH.

## Caso onda SH



Consideriamo quindi un'onda SH incidente dal basso, come in figura.

Indichiamo con  $\underline{l}$ ,  $\underline{m}$ ,  $\underline{n}$  i vettori numeri d'onda associati alle onde incidente, riflessa e rifratta. Sarà:

$$\underline{l} = \frac{\omega}{\beta_2} \hat{l} \quad \underline{m} = \frac{\omega}{\beta_2} \hat{m} \quad \underline{n} = \frac{\omega}{\beta_1} \hat{n}$$

$$\hat{l} = (\sin I, 0, \cos I) \quad \hat{m} = (\sin J, 0, \cos J) \quad \hat{n} = (\sin K, 0, \cos K)$$

Se assumiamo l'ampiezza dell'onda incidente come unitaria, gli spostamenti associati ad ogni onda si possono esprimere come

$$\begin{aligned} \text{Onda incidente:} & \quad \hat{y} \exp i(\underline{l} \cdot \underline{x} - \omega t) \\ \text{Onda riflessa:} & \quad R \hat{y} \exp i(\underline{m} \cdot \underline{x} - \omega t) \\ \text{Onda trasmessa:} & \quad T \hat{y} \exp i(\underline{n} \cdot \underline{x} - \omega t) \end{aligned}$$

Ove  $R, T$  sono i coefficienti di riflessione e trasmissione. Il moto totale nel mezzo 2 è dato dalla somma dell'onda incidente e di quella riflessa. La continuità degli spostamenti attraverso l'interfaccia posta a  $z=0$  dà:

$$\hat{y} \exp i(\underline{l} \cdot \underline{x} - \omega t) + R \hat{y} \exp i(\underline{m} \cdot \underline{x} - \omega t) = T \hat{y} \exp i(\underline{n} \cdot \underline{x} - \omega t)$$

La dipendenza temporale è chiaramente uguale a destra e sinistra e può essere trascurata. Inoltre

$$\exp i(l_x x + l_y y + l_z z) = \exp i(l_x x)$$

essendo  $l_y = 0$  e  $z = 0$ . Putando avremo

$$\exp i(l_x x) + R \exp i(m_x x) = T \exp i(n_x x)$$

Poiché la relazione deve essere valida in ogni punto  $x$ , la cosa sarà possibile solo se la forma della funzione è uguale per ogni termine:

$$l_x = m_x = n_x$$

In altri termini

$$\frac{\omega}{\beta_2} \sin I = \frac{\omega}{\beta_2} \sin J = \frac{\omega}{\beta_1} \sin K$$

La prima uguaglianza ci dà la **legge di riflessione**

$$I = J$$

mentre la seconda ci dà la **legge di rifrazione** (legge di Snell)

$$\frac{\sin I}{\beta_2} = \frac{\sin K}{\beta_1}$$

La condizione di continuità degli spostamenti pertanto ci dice:

$$1 + R = T$$

Il valore dei coefficienti  $R, T$  si ricava invece dalla continuità degli sforzi; per brevità ommettiamo i calcoli dando solo il risultato

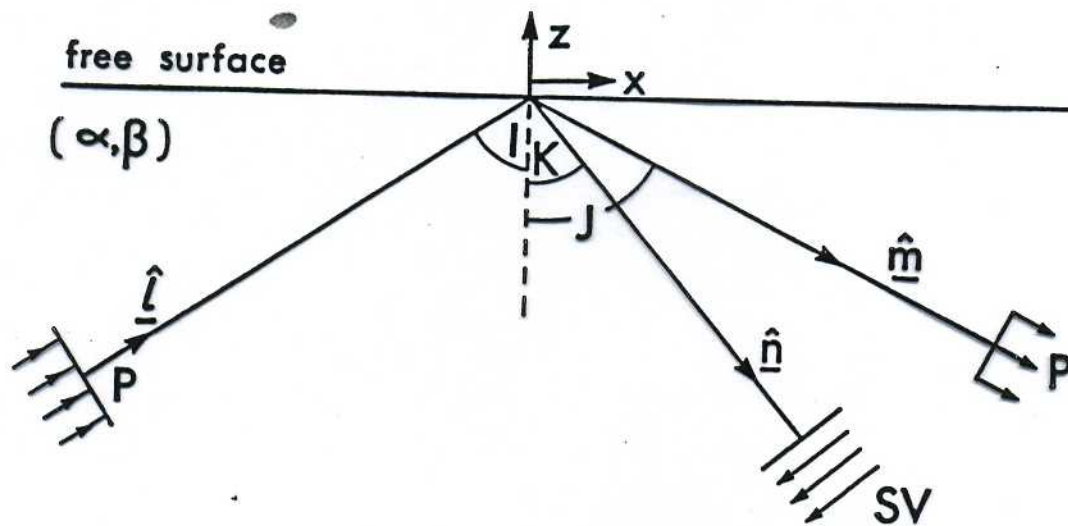
$$T = \frac{2 \rho_2 \beta_2 \cos I}{\rho_1 \beta_1 \cos K + \rho_2 \beta_2 \cos I}$$

$$R = T - 1$$

Vediamo che  $R$  e  $T$  dipendono dalle quantità  $\rho \beta \cos I$  in ogni mezzo. Esta dicesi **impedenza**.

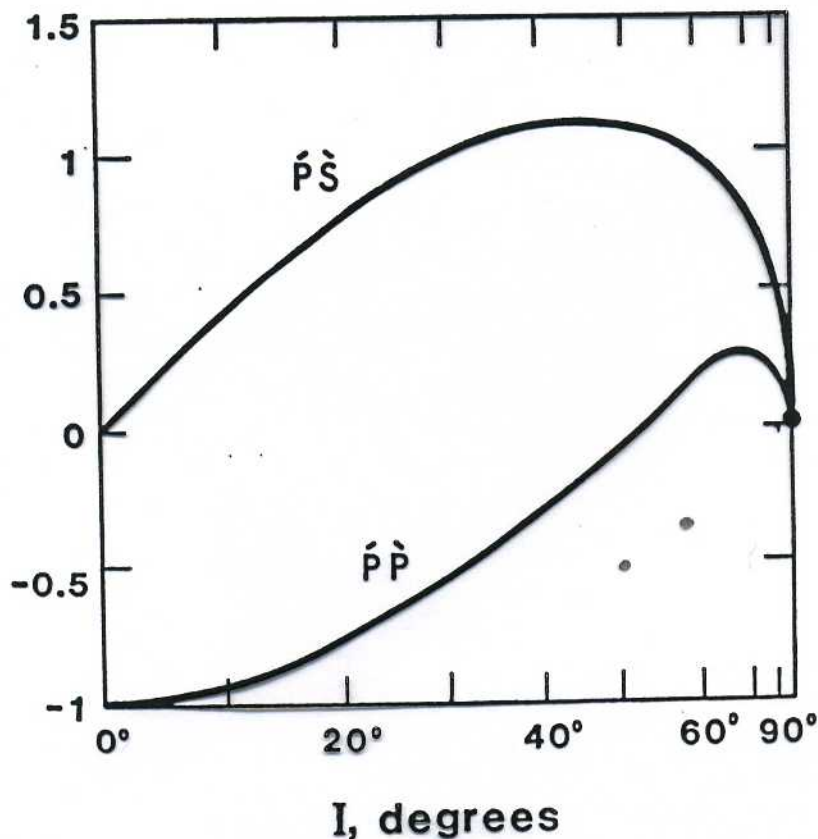
Da notare inoltre che i coefficienti  $R, T$  dipendono dall'angolo di incidenza dell'onda!





Caso onda P incidente su una superficie libera.  
L'angolo di riflessione per l'onda S è minore, avendo essa velocità minore.

coefficienti di riflessione corrispondenti in funzione dello  
angolo di incidenza. Nota l'assenza di conversione  $P \rightarrow S$   
per incidenza normale ( $I=0^\circ$ ) e la conversione totale per  $I \approx 52^\circ$ !



## Caso onde P, SV

Nel caso delle onde P ed SV incidenti su una discontinuità il problema è leggermente più complicato in quanto in generale esse generano sia moto P che SV. Infatti sia per le P che per le SV il moto è confinato nel piano  $xz$ . Chiaramente non verrà invece generato nessun spostamento lungo  $y$ , cioè non verranno generate onde SH. Vedi figura a fondo pagina!

## Angolo critico

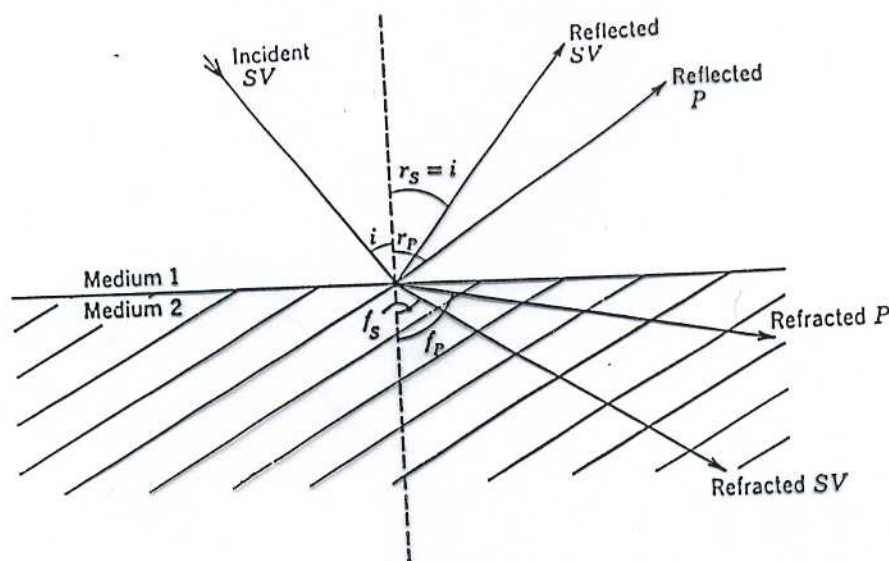
Consideriamo la legge di Snell per un'interfaccia tra due mezzi ed indichiamo con  $I$  l'angolo di incidenza, con  $T$  l'angolo di rifrazione (trasmissione). Avremo per un'onda P

$$\frac{\sin I}{\sin T} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

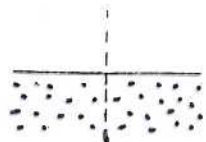
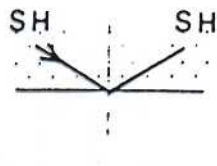
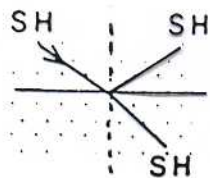
Nel caso cioè  $T = 90^\circ$ , l'angolo di incidenza dicesi **critico** e risulta

$$I = I_c = \sin^{-1}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)$$

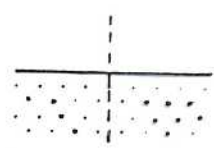
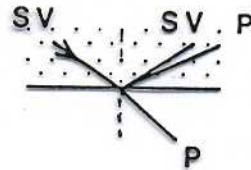
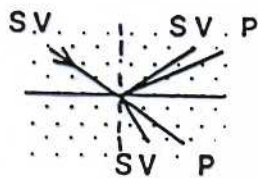
Per angoli di incidenza maggiori di quello critico, non si ha energia rifratta nel secondo mezzo.



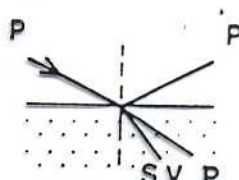
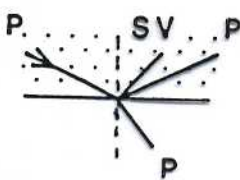
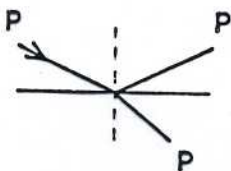
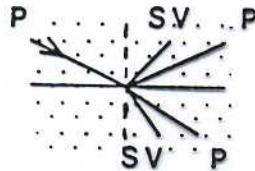
Incident SH



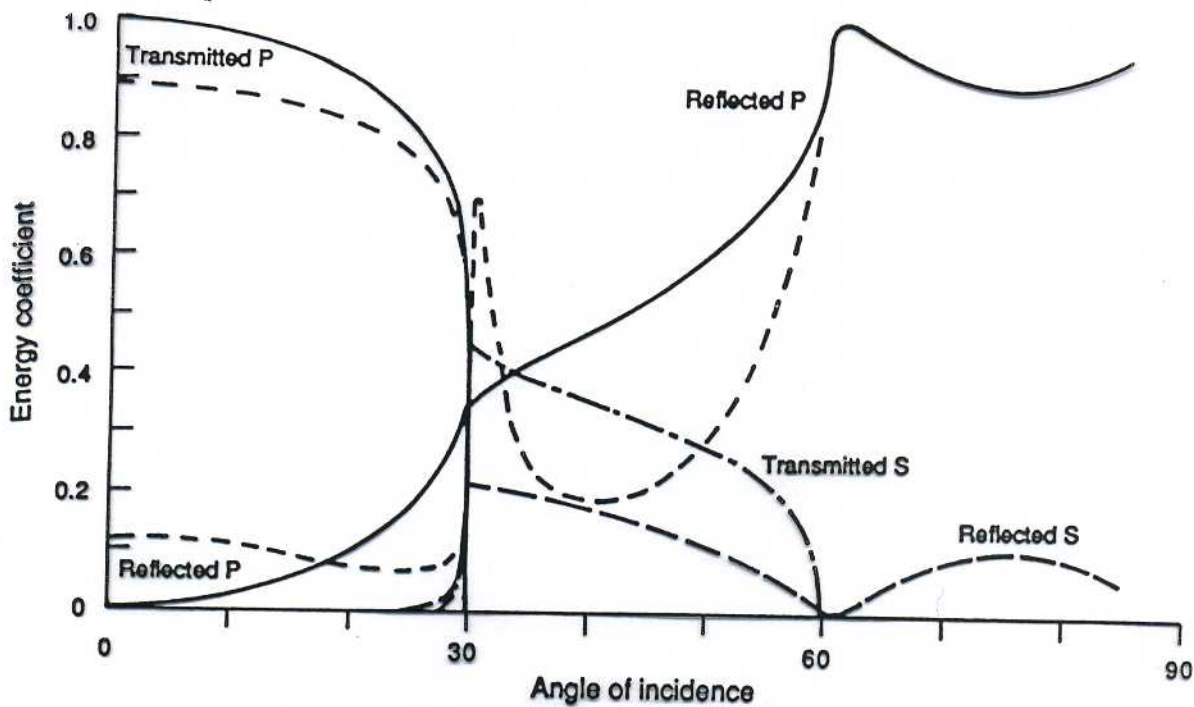
Incident SV



Incident P



Casi relativi all'incidenza dall'alto delle tre tipi di onda su una interfaccia tra due mezzi (solido punteggiato; liquido bianco).



Variationi con l'angolo di incidenza dei coefficienti di trasmissione e riflessione per un'onda P incidente su una interfaccia tra due solidi.  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 0.5$   $\frac{\rho_1}{\rho_2} = 2$   $\frac{\alpha_1}{\beta_1} = 1.87$   $\frac{\alpha_2}{\beta_2} = 1.73$ .