

# **Richiami di geotecnica - 4**

rev. 02.10.2018

I testi e le figure che seguono sono stati estratti, con alcune modifiche, da uno o più dei seguenti testi, a cui si rimanda per chiarimenti e approfondimenti:

- Bowles J. E., FONDAZIONI PROGETTO E ANALISI, McGraw-Hill, Milano, 1991
- Colombo P., Colleselli F., ELEMENTI DI GEOTECNICA, Zanichelli, Bologna, 2004
- Facciorusso J., Madaia C., Vannucchi G. – DISPENSE DI GEOTECNICA, Dipartimento di Ingegneria Civile – Sezione Geotecnica, Università degli Studi di Firenze, 2006 e relativo materiale le lezioni
- Lancellotta R., Costanzo D., Foti S., PROGETTAZIONE GEOTECNICA SECONDO L'EUROCODICE 7 (UNI EN 1997) E LE NORME TECNICHE PER LE COSTRUZIONI (NTC 2008), Hoepli Ed., Milano, 2011
- Lancellotta R., Calavera J., FONDAZIONI, McGraw-Hill, Milano, 2003

## PIANI E TENSIONI PRINCIPALI

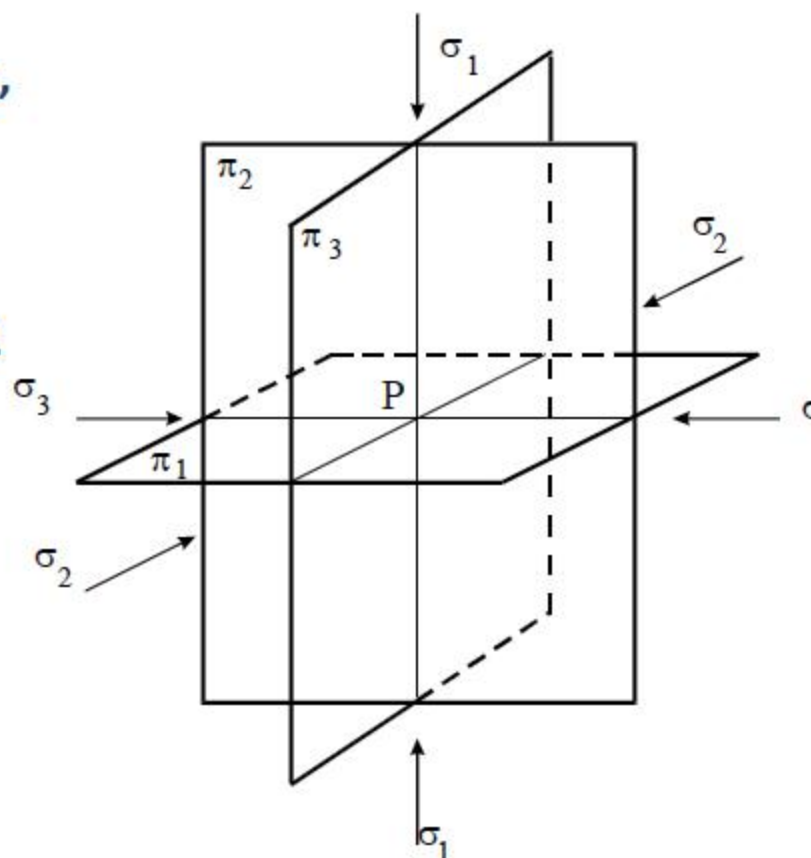
Preso un punto P all'interno di un corpo continuo, le tensioni sui possibili elementi superficiali infinitesimi passanti per P (tensione risultante e relative componenti normale  $\sigma$  e tangenziale  $\tau$  sull'elemento superficiale considerato) variano in generale da elemento a elemento.

Si può dimostrare che nella stella di piani passanti per P esistono almeno 3 piani, ortogonali fra loro, su cui agiscono esclusivamente tensioni normali. Questi 3 piani sono detti **principali**; le tensioni che agiscono su di essi sono dette *tensioni principali*

$\sigma_1$  = tensione principale maggiore (agisce sul piano principale maggiore  $\pi_1$ )

$\sigma_2$  = tensione principale intermedia (agisce sul piano principale intermedio  $\pi_2$ )

$\sigma_3$  = tensione principale minore (agisce sul piano principale minore  $\pi_3$ )



# STATI TENSIONALI

## STATO TENSIONALE ISOTROPO

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \quad (\text{tensione isotropa}) \quad \rightarrow$$

tutti i piani della stella sono  
principali e la tensione (isotropa)  
è eguale in tutte le direzioni.

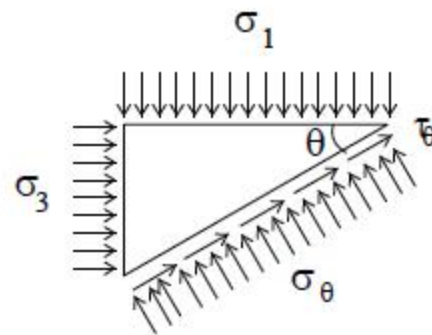
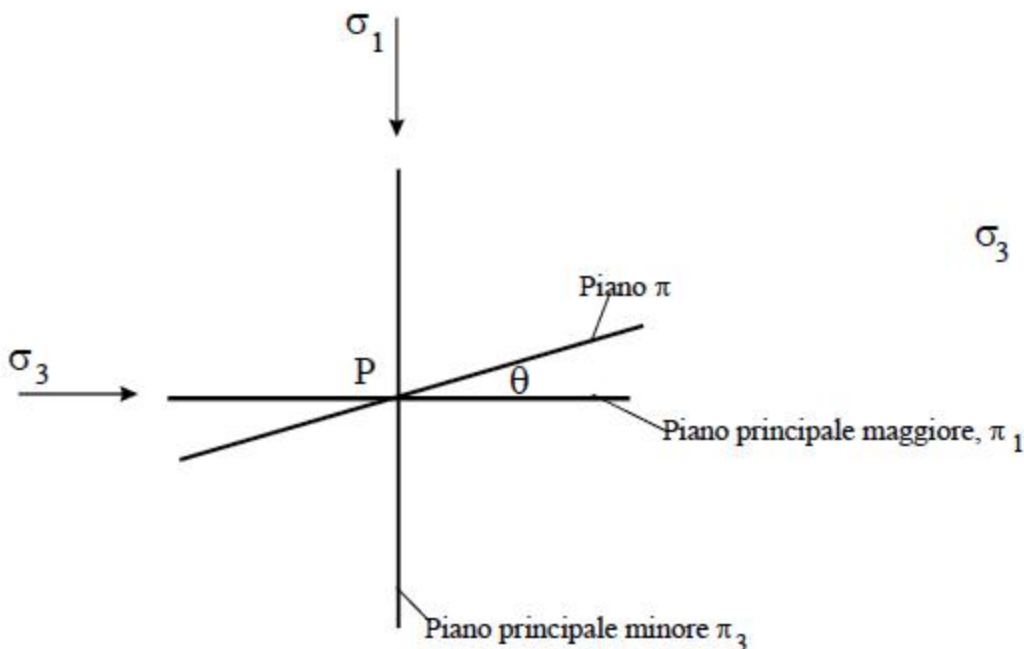
## STATO TENSIONALE ASSIAL-SIMMETRICO

$$\sigma_i = \sigma_j \neq \sigma_k \quad \rightarrow$$

esiste un fascio di piani principali (che ha per asse  
la  $\sigma_k$ ) sui quali agiscono tensioni uguali ( $\sigma_i = \sigma_j$ ) e  
un piano principale ad essi ortogonale (sul quale  
agisce la  $\sigma_k$ )

## STATO TENSIONALE PIANO

Poiché gli stati tensionali critici per i terreni interessano, nella maggior parte dei problemi pratici, piani ortogonali al piano principale intermedio, ovvero appartenenti al fascio avente per asse la direzione della tensione principale intermedia  $\sigma_2$ , è possibile ignorare il valore e gli effetti della tensione principale intermedia e riferirsi ad un sistema piano di tensioni



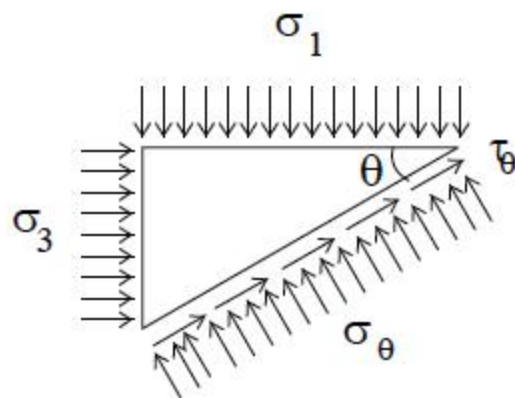
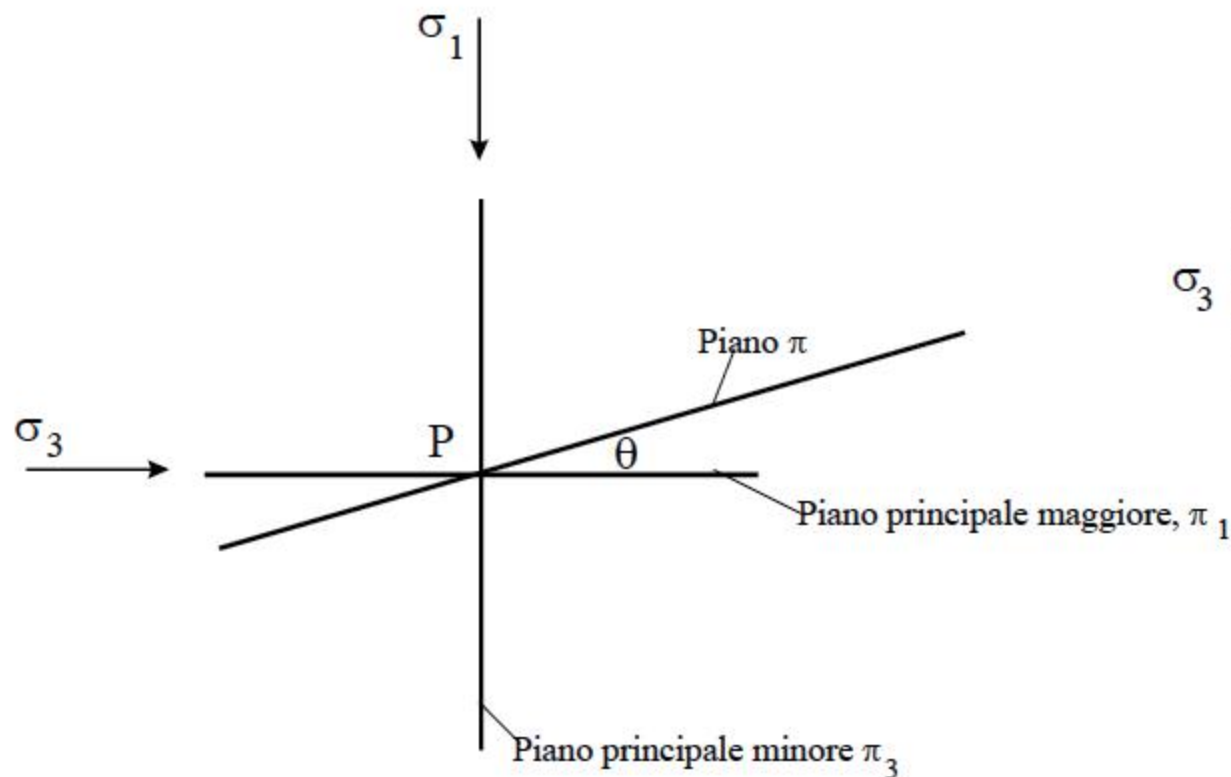
### CONVENZIONE SEGNI:

$\sigma$  positiva se di compressione;

$\tau$  positiva se produce rotazione anti oraria rispetto ad un punto mediamente esterno al piano di giacitura

$\theta$  positivo in senso antiorario

Si consideri, nell'intorno del punto P, un elemento prismatico triangolare di spessore unitario e lati di dimensioni infinitesime, disposti parallelamente ai due piani principali,  $\pi_1$  e  $\pi_3$ , e ad un generico piano  $\pi$  passante per P inclinato di  $\theta$  rispetto a  $\pi_1$ .



Dall'equilibrio alla traslazione dell'elemento prismatico nelle direzioni di  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$ :

$$\sigma_3 \cdot dl \cdot \sin \theta - \sigma_\theta \cdot dl \cdot \sin \theta - \tau_\theta \cdot dl \cdot \cos \theta = 0$$

$$\sigma_1 \cdot dl \cdot \cos \theta - \sigma_\theta \cdot dl \cdot \cos \theta + \tau_\theta \cdot dl \cdot \sin \theta = 0$$

$$\tau_\theta = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cdot \sin 2\theta$$

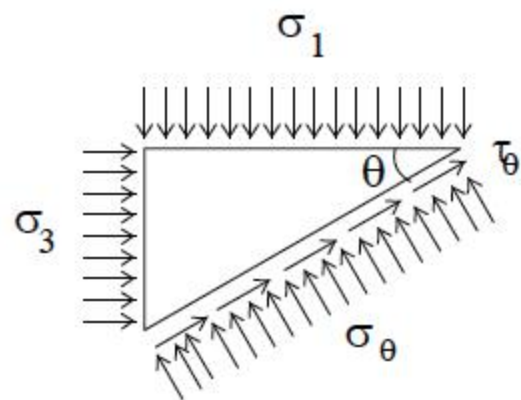
$$\sigma_\theta = \sigma_3 + (\sigma_1 - \sigma_3) \cdot \cos^2 \theta$$

Equazione di un cerchio nel piano ( $\sigma, \tau$ )

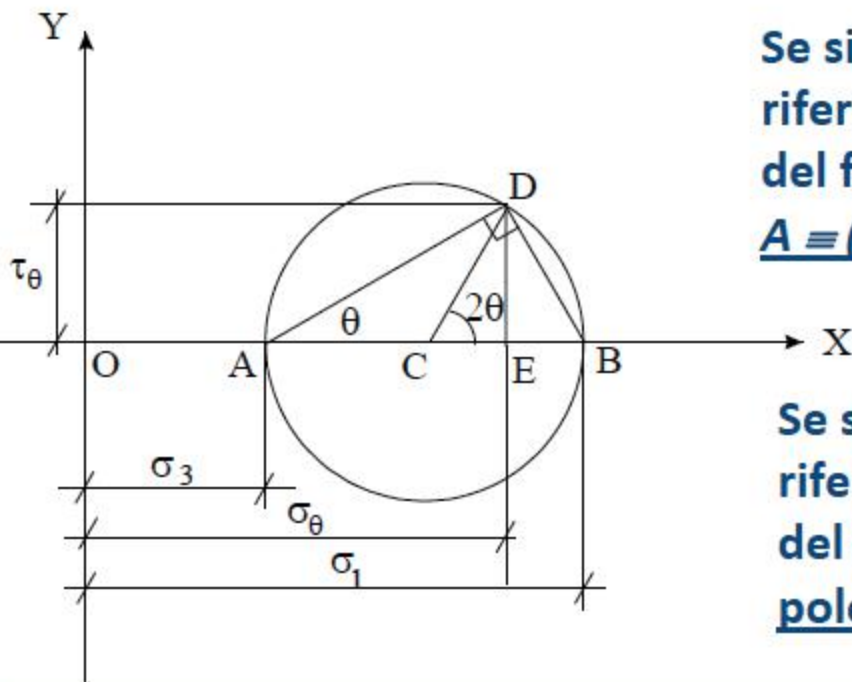
Riportando in un sistema di assi cartesiani ortogonali (*piano di Mohr*) le tensioni normali,  $\sigma$ , lungo l'asse X e le tensioni tangenziali,  $\tau$ , lungo l'asse Y, al variare di  $\theta$ , si ottiene un cerchio (*cerchio di Mohr*) con:

RAGGIO:  $R = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$       CENTRO:  $C \equiv [(\sigma_1 + \sigma_3)/2; 0]$

che rappresenta il luogo geometrico delle condizioni di tensione su tutti i piani del fascio.



Def. Si definisce **polo** o origine dei piani il punto tale che qualunque retta uscente da esso interseca il cerchio in un punto le cui coordinate rappresentano lo stato tensionale agente sul piano che ha per traccia la retta considerata.



Se si assume il piano principale maggiore  $\pi_1$  come riferimento per individuare l'orientazione dei piani del fascio (la cui traccia è l'asse X)

$A \equiv (\sigma_3, 0)$  rappresenta il polo

Se si assume il piano principale minore  $\pi_3$  come riferimento per individuare l'orientazione dei piani del fascio (e la cui traccia coincide con l'asse X), il polo coincide con  $B \equiv (\sigma_1, 0)$

OSS. L'angolo di inclinazione  $\theta$  tra due piani ( $B\hat{A}D$ ) è metà dell'angolo al centro del cerchio di Mohr che sottende i punti rappresentativi delle tensioni agenti sui due piani ( $B\hat{C}D$ ).



Per le **verifiche di resistenza** delle opere geotecniche è necessario valutare quali sono gli stati di tensione massimi sopportabili dal terreno **in condizioni di incipiente rottura**.

*La resistenza al taglio di un terreno in una direzione è la massima tensione tangenziale,  $\tau_f$ , che può essere applicata al terreno, in quella direzione, prima che si verifichi la "rottura".*

Nella Meccanica dei Terreni si parla di **resistenza al taglio**, perché nei terreni, essendo di natura particellare, le deformazioni (e la rottura) avvengono principalmente per scorrimento relativo fra i grani.

La *rottura* (ovvero quella condizione cui corrispondono deformazioni **inaccettabilmente elevate**):

- può essere improvvisa e definitiva, con perdita totale di resistenza (come avviene generalmente per gli ammassi rocciosi)
- oppure può avere luogo dopo grandi deformazioni plastiche, senza completa perdita di resistenza (come si verifica spesso nei terreni)

In linea teorica se si utilizzasse per l'analisi delle condizioni di equilibrio e di rottura dei terreni un **modello discreto**, costituito da un insieme di particelle a contatto, si dovrebbero valutare le azioni mutue intergranulari (normali e tangenziali alle superfici di contatto) e confrontarle con i valori limite di equilibrio. Tale approccio, allo stato attuale e per i terreni reali, non è applicabile.

In pratica si utilizza un **modello continuo**, costituito, nell'ipotesi di terreno saturo, dalla sovrapposizione nello stesso spazio di un continuo solido corrispondente alle particelle di terreno, ed un continuo fluido, corrispondente all'acqua che occupa i vuoti interparticellari.

OSS: l' $h_p$  di mezzo continuo è accettabile anche perché la dimensione caratteristica dei fenomeni di interesse pratico è molto maggiore di quella della microstruttura, ovvero dei grani e dei pori.

Le tensioni che interessano il continuo solido sono le tensioni efficaci, definite dalla differenza tra le tensioni totali e le pressioni interstiziali (*I parte del principio delle tensioni efficaci*):

$$\sigma' = \sigma - u$$

La resistenza al taglio dei terreni è legata alle tensioni efficaci (*II parte del principio delle tensioni efficaci*):

*“Ogni effetto misurabile di una variazione dello stato di tensione, come la compressione, la distorsione e la variazione di resistenza al taglio è attribuibile esclusivamente a variazioni delle tensioni efficaci”*

$$\tau_f = f(\sigma')$$

## CRITERIO DI MOHR-COULOMB

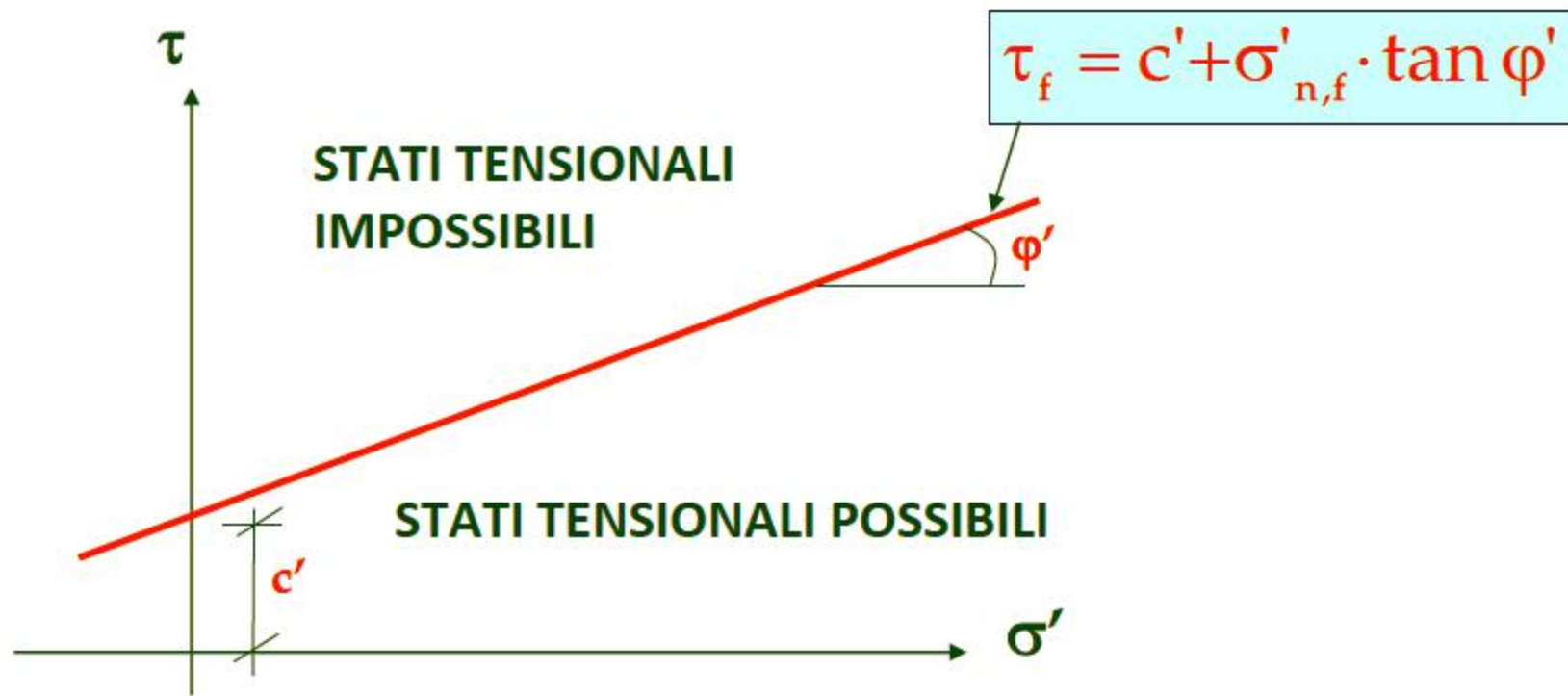
Il più semplice ed utilizzato criterio di rottura per i terreni, è il *criterio di Mohr-Coulomb (-Terzaghi)*:

$$\tau_f = c' + (\sigma - u) \cdot \tan \varphi' = c' + \sigma'_{n,f} \cdot \tan \varphi'$$

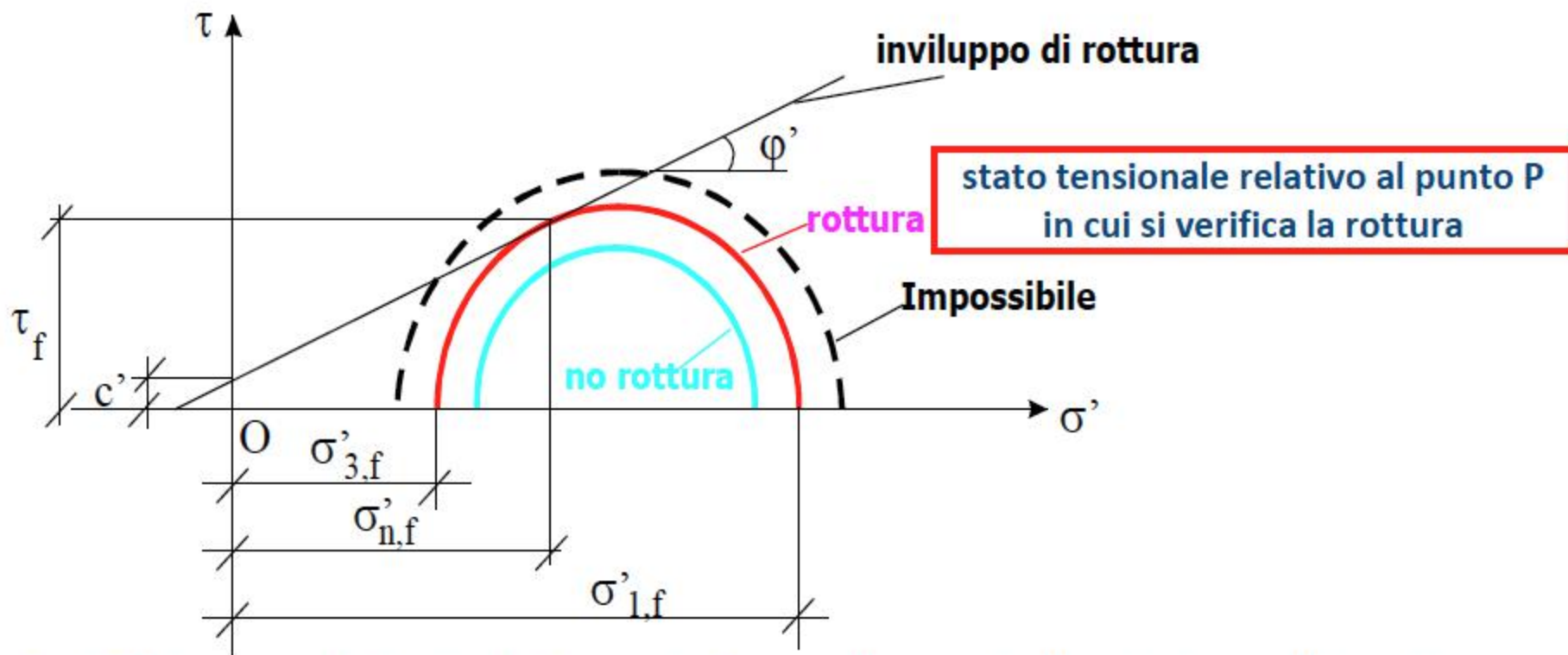
la tensione tangenziale limite di rottura in un generico punto P su una superficie di scorrimento potenziale interna al terreno è data dalla somma di due termini:

- ☞ il primo, detto *coesione* ( $c'$ ), è indipendente dalla tensione efficace ( $\sigma'$ ) agente nel punto P in direzione normale alla superficie
- ☞ il secondo è proporzionale a  $\sigma'$  mediante un coefficiente d'attrito  $\tan \varphi'$ . L'angolo  $\varphi'$  è detto *angolo di resistenza al taglio*.

Nel piano di Mohr il criterio di rottura di Mohr-Coulomb è descritto da una retta, detta retta involucro di rottura, che separa gli stati tensionali possibili da quelli privi di significato fisico in quanto incompatibili con la resistenza del materiale.

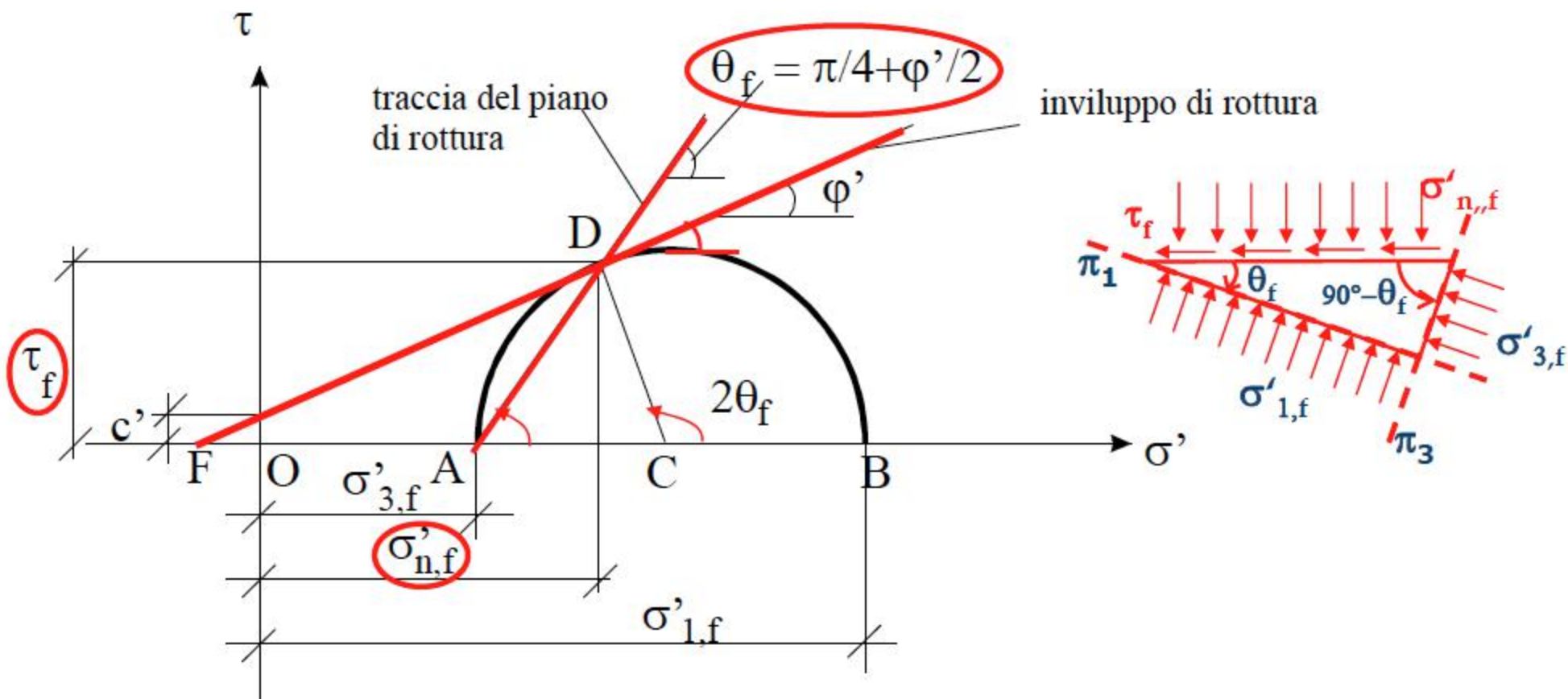


Se nel punto P si verifica la **rottura**, lo stato di tensione corrispondente (supposto per semplicità piano) sarà rappresentato nel piano  $\tau$ - $\sigma'$  da un cerchio di Mohr tangente all'involuppo di rottura

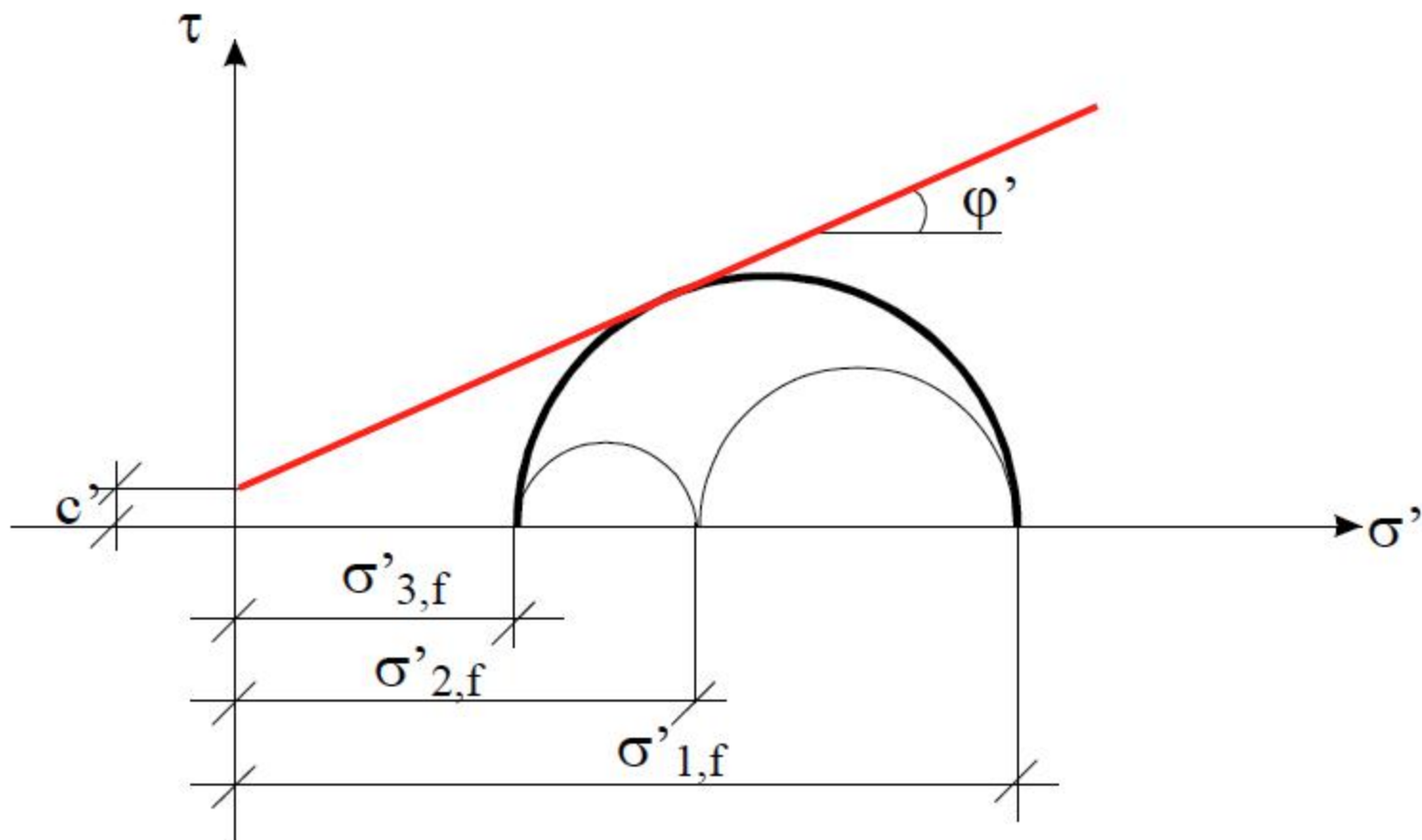


Un cerchio di Mohr tutto al di sotto della retta involuppo di rottura indica che la condizione di rottura non è raggiunta su nessuno dei piani passanti per il punto considerato, mentre non sono fisicamente possibili le situazioni in cui il cerchio di Mohr interseca l'involuppo di rottura.

(Nel punto P) l'inclinazione del piano di rottura (sul quale agiscono la tensione efficace normale  $\sigma'_{n,f}$  e la tensione tangenziale  $\tau_f$ ) rispetto al piano principale maggiore (sul quale agisce  $\sigma'_{1,f}$ ) è pari a:  $\theta_f = \pi/4 + \varphi'/2$



I. Il criterio di rottura di Mohr-Coulomb non dipende dalla tensione principale intermedia,  $\sigma'_{2,f}$

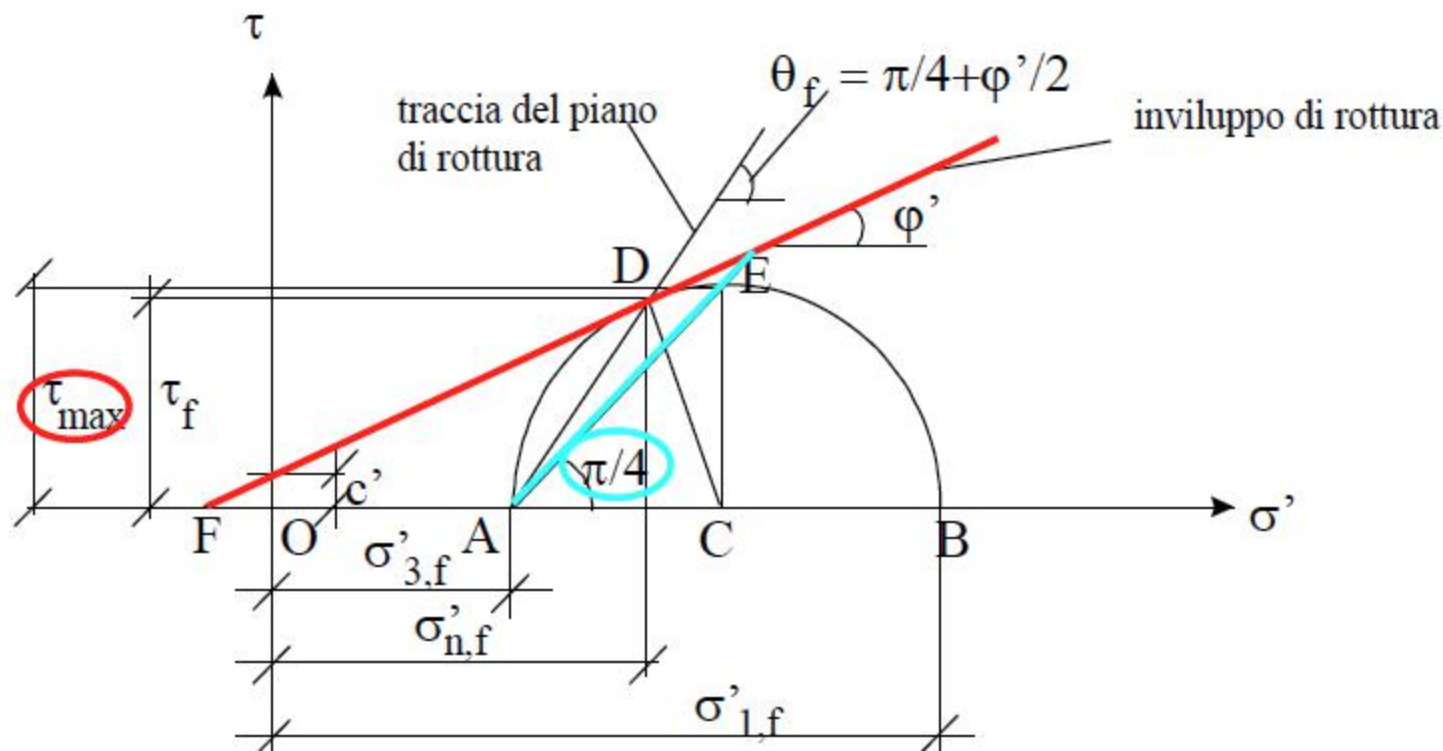




II. La tensione  $\tau_f$  non è il valore massimo della tensione tangenziale, che è invece pari al raggio del cerchio di Mohr:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \cdot (\sigma'_1 - \sigma'_3)$$

ed agisce (E) su un piano ruotato di  $\pi/4$  rispetto al piano principale maggiore (e quindi di  $\varphi'/2$  rispetto al piano di rottura)



III. I parametri di resistenza al taglio  $c'$  e  $\tan\phi'$  non sono caratteristiche fisiche del terreno, ma sono funzione di molti fattori (storia tensionale, indice dei vuoti, tipo di struttura, composizione granulometrica, etc.).

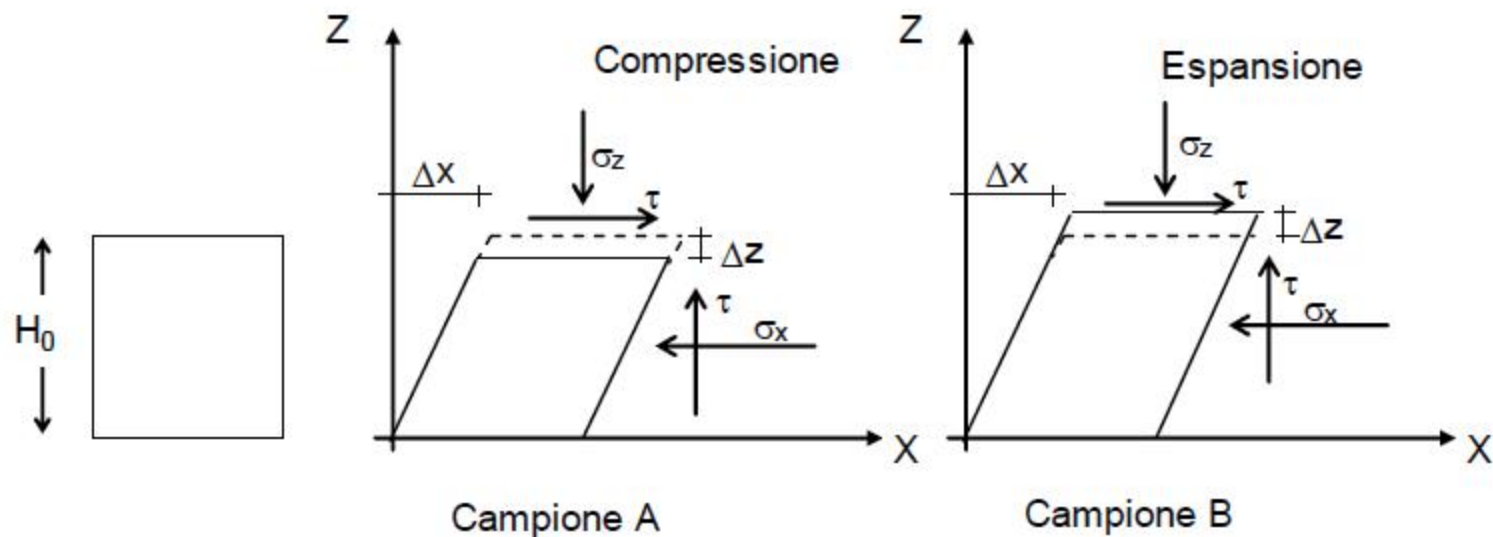
IV. L'involuppo a rottura può presentare  $c' = 0$ .

V. L'involuppo di rottura reale non è necessariamente una retta (anzi, è marcatamente curvilineo in prossimità dell'origine degli assi); spesso tale approssimazione è accettabile solo in un campo limitato di tensioni.

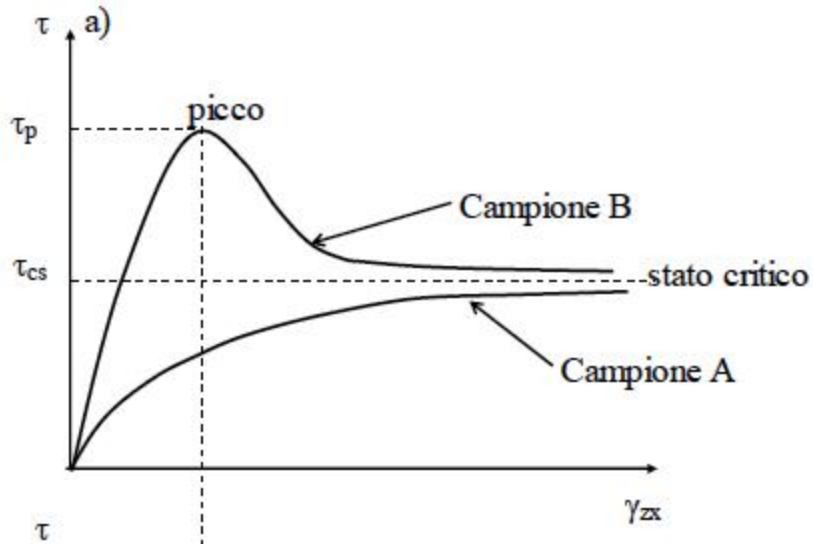
## VI. Come conseguenza del principio delle tensioni efficaci:

- per i terreni a grana grossa (nei quali a variazioni di tensione totale corrispondono immediatamente analoghe variazioni di tensione efficace) la resistenza al taglio, e quindi le condizioni di stabilità, non variano nel tempo dopo l'applicazione del carico.
- per i terreni a grana fine (consolidazione):
  - a. se le tensioni efficaci crescono (es. rilevato), anche la resistenza al taglio cresce e le condizioni di stabilità più critiche sono a breve termine,
  - b. se le tensioni efficaci decrescono (es. scavo) anche la resistenza al taglio decresce e le condizioni di stabilità più critiche sono a lungo termine

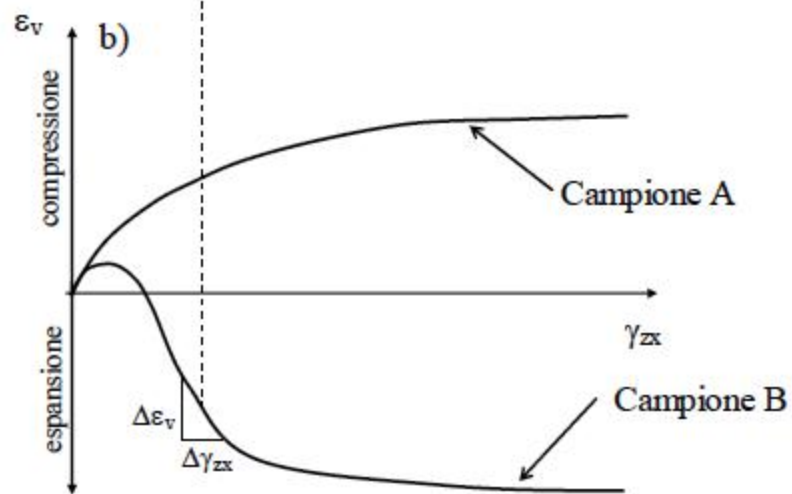
Si supponga di deformare progressivamente a taglio semplice con tensione normale (verticale) costante  $\sigma_z$  un campione A di sabbia sciolta o di argilla normalmente consolidata o debolmente sovraconsolidata ( $OCR \leq 2$ ), ed un campione B della stessa sabbia ma addensata o della stessa argilla ma fortemente sovraconsolidata ( $OCR > 2$ )



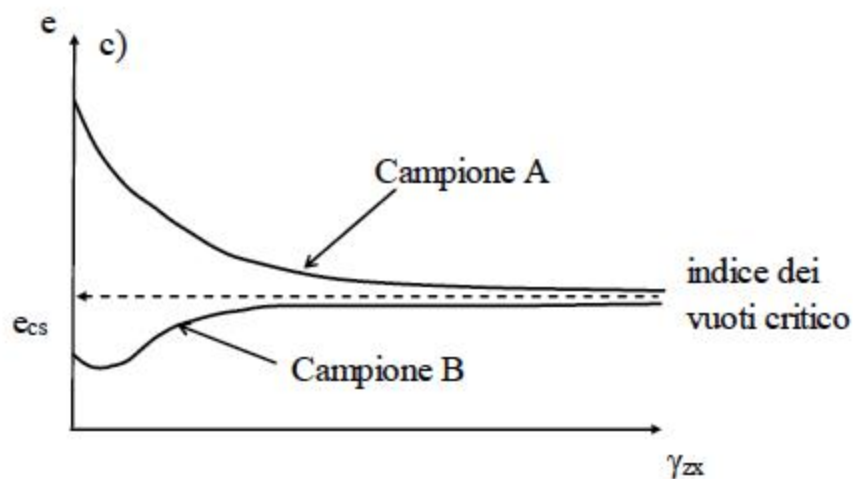
Poiché in condizioni di deformazione di taglio semplice le deformazioni orizzontali sono nulle ( $\epsilon_x = \epsilon_y = 0$ ), la deformazione volumetrica coincide con la deformazione verticale. ( $\epsilon_v = \epsilon_z = \Delta z/H_0$ ). La deformazione di taglio è la distorsione angolare  $\gamma_{zx} = \Delta x/H_0$ .



*Per un assegnato valore della tensione normale  $\sigma_z$*



$$\tan \alpha = - \frac{\Delta \epsilon_v}{\Delta \gamma_{zx}} = - \frac{d \epsilon_v}{d \gamma_{zx}}$$



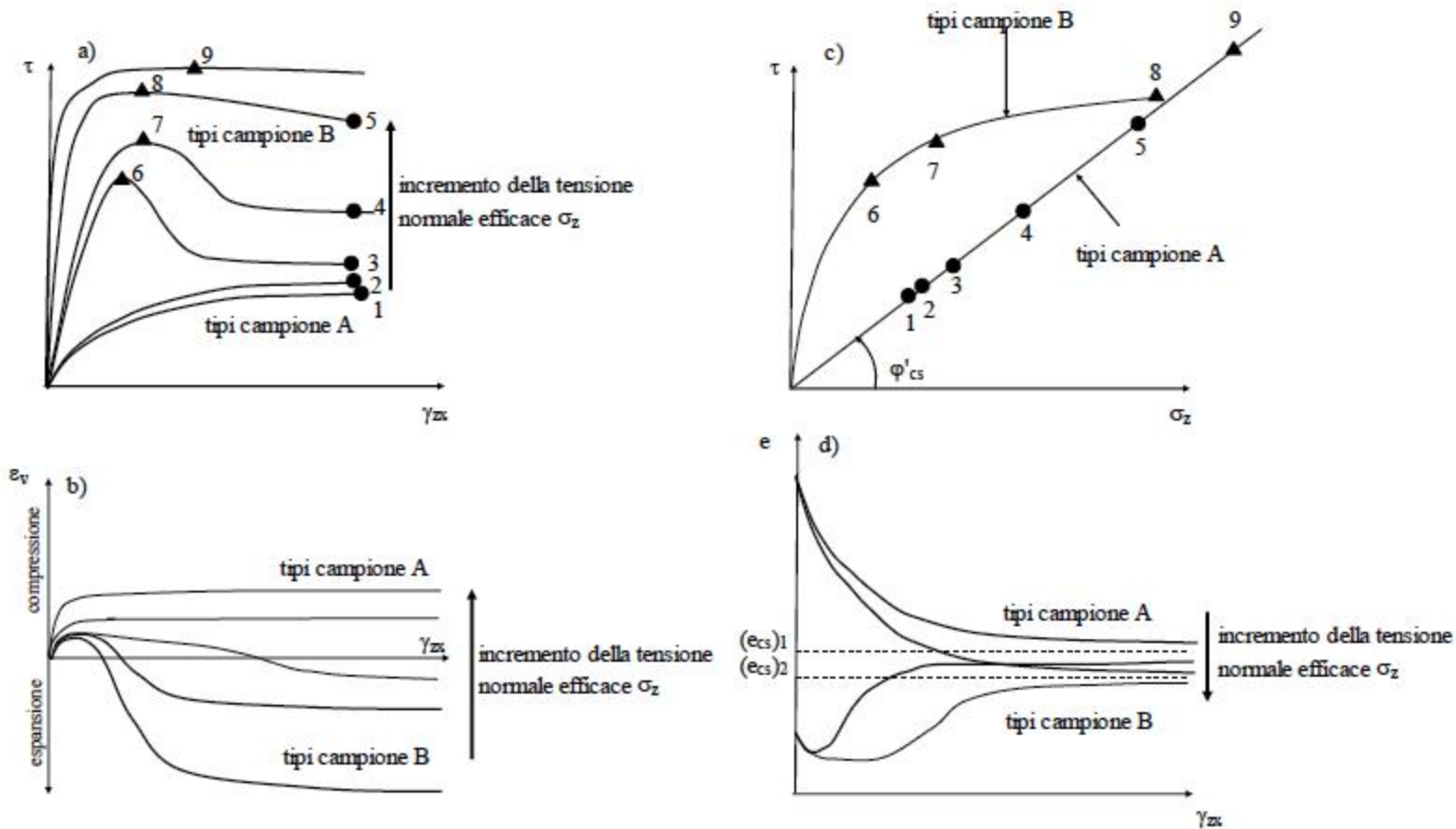
Il **campione A** (sabbia sciolta o argilla normalmente consolidata o debolmente sovraconsolidata ( $OCR \leq 2$ )) al crescere della deformazione di taglio mostra un graduale incremento della tensione di taglio fino a stabilizzarsi su un valore  $\tau_{cs}$ , detto di stato critico, e una progressiva riduzione di volume (le deformazioni  $\varepsilon_v$  sono positive in compressione) fino a stabilizzarsi su un valore costante per grandi deformazioni. Conseguentemente l'indice dei vuoti, ovvero lo stato di addensamento, si riduce progressivamente dal valore iniziale fino a stabilizzarsi per grandi deformazioni su un valore costante  $e_{cs}$  detto di stato critico.

Il **campione B** (sabbia addensata o argilla fortemente sovraconsolidata ( $OCR > 2$ )) al crescere della deformazione di taglio mostra inizialmente un rapido incremento della tensione di taglio fino a raggiungere un valore di picco,  $\tau_p$ , per deformazioni ancora relativamente piccole, poi un decremento progressivo fino a stabilizzarsi sul valore critico  $\tau_{cs}$ , poco superiore o eguale al corrispondente valore critico del campione A. La deformazione volumetrica al crescere della deformazione di taglio è inizialmente di compressione (riduzione di volume) ma poi si inverte di segno e diviene negativa, ovvero di espansione, con aumento di volume e di indice dei vuoti fino al valore critico  $e_{cs}$ .

La condizione di **stato critico** ( $\tau_{cs}$ ,  $e_{cs}$ ), caratterizzata da tensione di taglio e volume costanti al crescere della deformazione di taglio, è comune ai due campioni A e B, ovvero è **indipendente dallo stato iniziale**.

Al crescere della tensione  $\sigma_z$  i campioni di tipo A (sabbia sciolta o argilla normalmente consolidata o debolmente sovraconsolidata ( $OCR \leq 2$ )) mostrano un progressivo incremento della tensione massima di stato critico e della deformazione volumetrica di compressione.

Al crescere della tensione  $\sigma_z$  i campioni di tipo B (sabbia addensata o argilla fortemente sovraconsolidata ( $OCR > 2$ )) mostrano un picco di resistenza sempre meno accentuato, fino a scomparire per sufficientemente elevati valori di  $\sigma_z$ , un incremento della tensione di stato critico e una riduzione del comportamento dilatante



**Riportando in grafico nel piano di Mohr i punti corrispondenti allo stato critico dei campioni di tipo A e B ed ai picchi di resistenza dei campioni di tipo B si osserva che i punti corrispondenti allo stato critico sono ben allineati su un'unica retta passante per l'origine, mentre i punti corrispondenti alla resistenza di picco definiscono una linea curva con concavità verso il basso che termina sulla linea retta precedentemente individuata.**



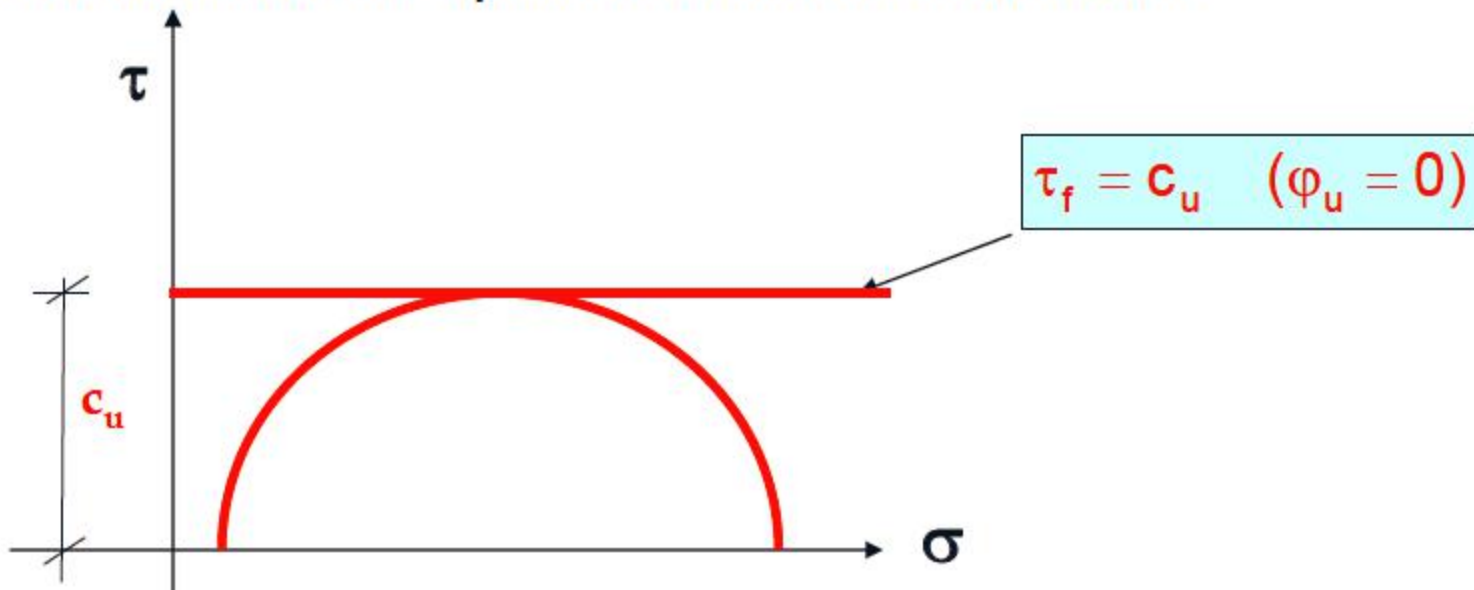
## CRITERIO DI TRESCA

Qualora il terreno pervenga a rottura in condizioni non drenate (in genere nei terreni coesivi e quando la velocità di applicazione del carico è tale da impedire lo smaltimento delle sovrappressioni interstiziali) e quando non è nota l'entità delle sovrappressioni  $\Delta u$ , la resistenza al taglio può essere determinata ed espressa solo in termini di tensioni totali, secondo il *criterio di Tresca*:

$$\tau_f = c_u$$

dove  $c_u$  è la *resistenza al taglio non drenata*.

Nel piano di Mohr il criterio di Tresca è descritto da una retta orizzontale ( $\phi_u = 0$ ), che inviluppa i cerchi di rottura espressi in termini di tensioni totali:



## PROVA DI TAGLIO DIRETTO

### TIPO DI TERRENO:

campioni ricostituiti di materiali sabbiosi;

campioni indisturbati o ricostituiti di terreni a grana fine.

La dimensione massima dei grani di terreno deve essere almeno 6 volte inferiore all'altezza del provino.

### SCOPO DELLA PROVA:

determinare le caratteristiche di resistenza al taglio del terreno



**ATTREZZATURA:** il provino è un prisma a sezione quadrata (lato =  $60 \div 100 \text{ mm}$   $\gg$  altezza =  $20 \div 40 \text{ mm}$  per velocizzare il processo di consolidazione e ridurre l'attrito laterale)

Il provino è inserito in un telaio metallico diviso orizzontalmente in 2 parti uguali; è racchiuso tra due piastre metalliche forate e nervate, carta filtro e pietre porose.

Il tutto è posto in una scatola metallica piena d'acqua che può scorrere a velocità prefissata su un binario trascinando la parte inferiore del telaio; la parte superiore è bloccata da un contrasto collegato ad un dinamometro per la misura delle forze orizzontali.

Sulla testa del provino si trova un capitello che consente di trasformare un carico verticale in pressione uniforme.

