

Richiami di geotecnica - 5

Spinta delle terre (teoria di Rankine)

rev. 09.10.2018

I testi e le figure che seguono sono stati estratti, con alcune modifiche, da uno o più dei seguenti testi, a cui si rimanda per chiarimenti e approfondimenti:

- Bowles J. E., FONDAZIONI PROGETTO E ANALISI, McGraw-Hill, Milano, 1991
- Colombo P., Colleselli F., ELEMENTI DI GEOTECNICA, Zanichelli, Bologna, 2004
- Facciorusso J., Madiati C., Vannucchi G. – DISPENSE DI GEOTECNICA, Dipartimento di Ingegneria Civile – Sezione Geotecnica, Università degli Studi di Firenze, 2006 e relativo materiale le lezioni
- Lancellotta R., Costanzo D., Foti S., PROGETTAZIONE GEOTECNICA SECONDO L'EUROCODICE 7 (UNI EN 1997) E LE NORME TECNICHE PER LE COSTRUZIONI (NTC 2008), Hoepli Ed., Milano, 2011
- Lancellotta R., Calavera J., FONDAZIONI, McGraw-Hill, Milano, 2003

TEORIE PER IL CALCOLO DELLA SPINTA DELLE TERRE

La determinazione della spinta esercitata dal terreno contro un'opera di sostegno è un problema classico di ingegneria geotecnica che viene affrontato utilizzando due teorie “storiche”:

- la teoria di **Rankine** (1857)
- la teoria di **Coulomb** (1776).

Entrambi i metodi assumono superfici di scorrimento piane, ma per effetto dell'attrito fra la parete e il terreno:

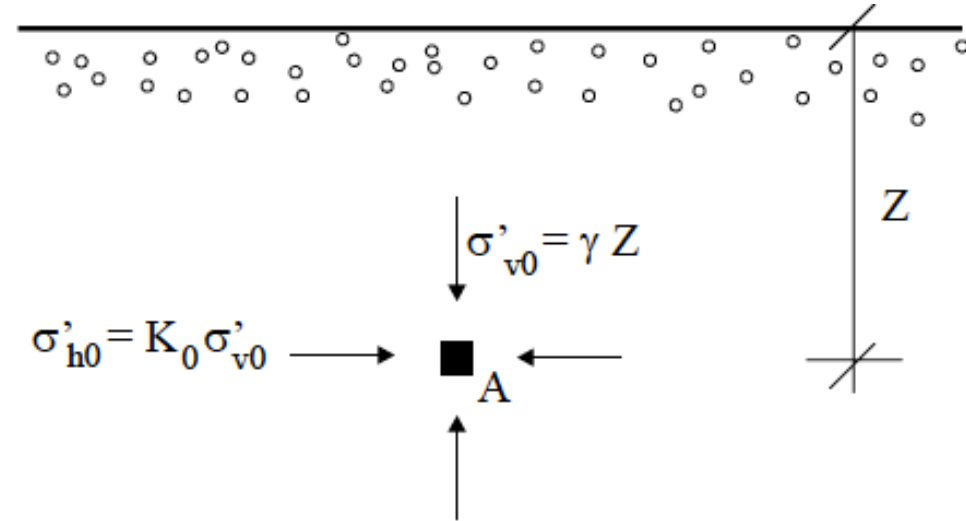
- a) le reali superfici di scorrimento sono in parte curvilinee
- b) i risultati che si ottengono applicando i metodi classici sono spesso non cautelativi.

È pertanto opportuno riferirsi al metodo di **Caquot Kérisel** (1948) che è il più noto e applicato metodo fra quelli che assumono superfici di scorrimento curvilinee.

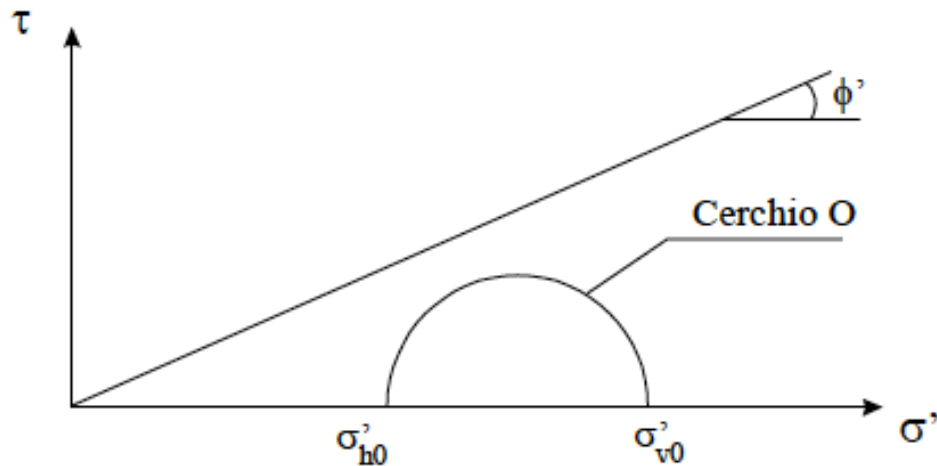
TEORIA DI RANKINE

IPOTESI:

- terreno omogeneo (γ costante con la profondità)
- superficie piana, orizzontale ed infinitamente estesa
- terreno incoerente ($c' = 0$)
- terreno asciutto ($u = 0, \sigma_v = \sigma'_v$)
- validità del criterio di rottura di Mohr-Coulomb ($\tau = \sigma'_n \tan \phi'$)



Stato tensionale assial-simmetrico



$$\sigma'_{v0} = \sigma'_1$$

$$\sigma'_{h0} = \sigma'_2 = \sigma'_3 (*)$$

(*) per $K_0 < 1$ (terreni NC o debolmente OC)

SPINTA A RIPOSO

IPOTESI:

vengono inserite due pareti verticali ideali, cioè tali da non modificare lo stato tensionale nel terreno (assenza di attrito)

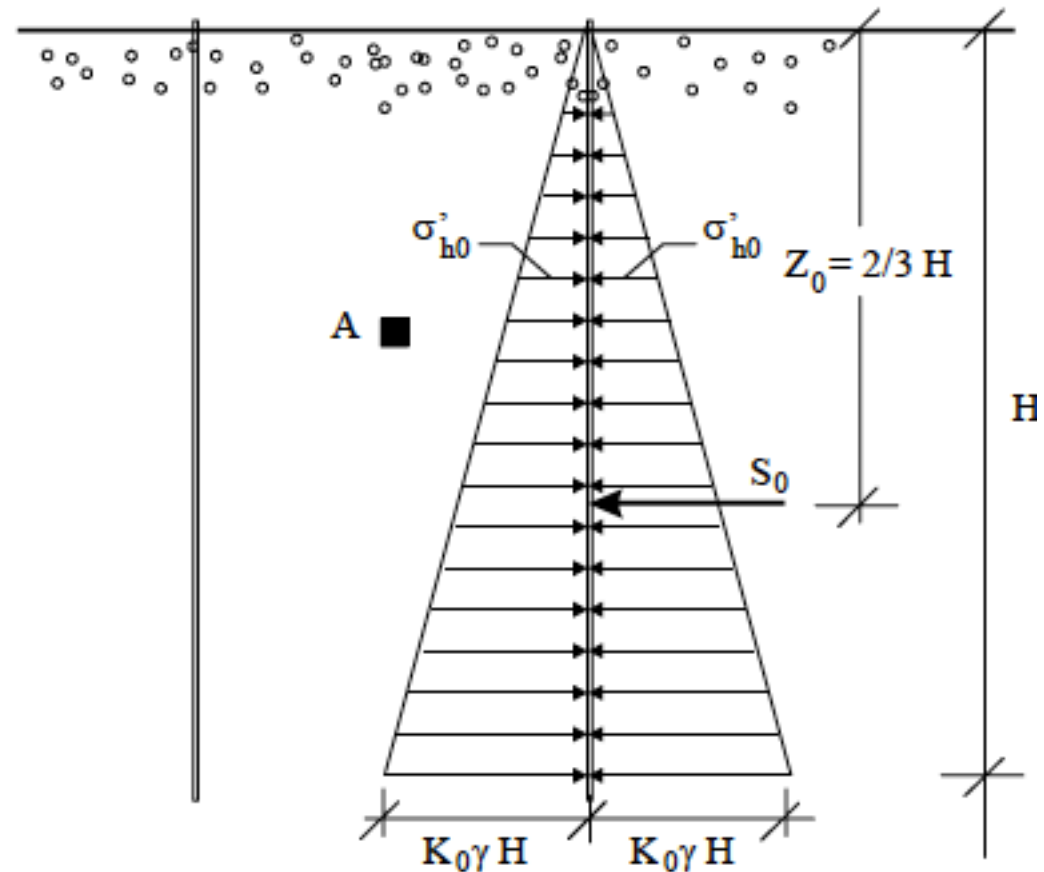
Stato tensionale a riposo

La spinta orizzontale S_0 che si esercita sui due lati di ciascuna parete dalla superficie ad una generica profondità H , vale

$$S_0 = \int_0^H \sigma'_{ho} dZ = \frac{1}{2} \gamma H^2 K_0$$

La profondità Z_0 della retta di applicazione di S_0 , vale:

$$Z_0 = \frac{\int_0^H \sigma'_{ho} Z dZ}{S_0} = \frac{2}{3} H$$

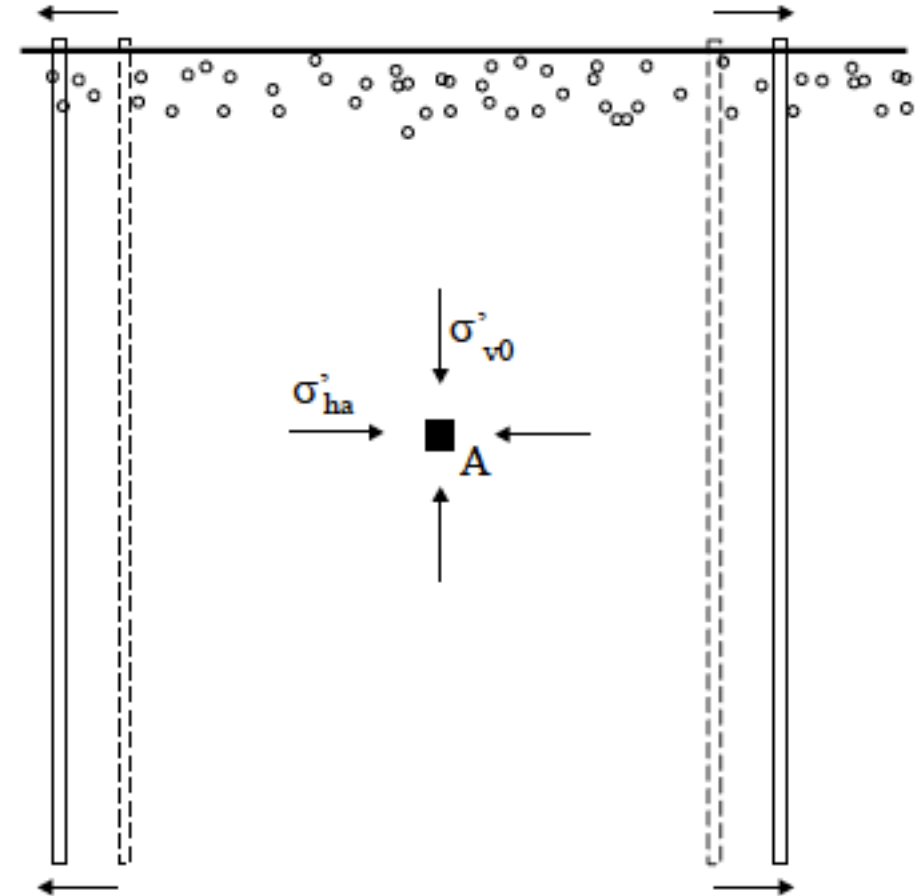


SPINTA ATTIVA

Stato tensionale limite attivo

Supponiamo ora di allontanare gradualmente le due pareti:

- nel punto A permangono condizioni di simmetria (le tensioni verticale ed orizzontali sono ancora principali);
- la tensione verticale $\sigma'_{v0} = \gamma Z$ non varia
- la tensione orizzontale efficace si riduce progressivamente.



SPINTA ATTIVA

Il valore minimo della tensione orizzontale, σ'_{hA} , compatibile con l'equilibrio, è detto tensione limite attiva, e corrisponde alla tensione principale minore del cerchio di Mohr tangente alla retta di involucro a rottura. Essendo:

$$R = \frac{1}{2} (\sigma'_{v0} - \sigma'_{hA})$$

$$OC = \frac{1}{2} (\sigma'_{v0} + \sigma'_{hA})$$

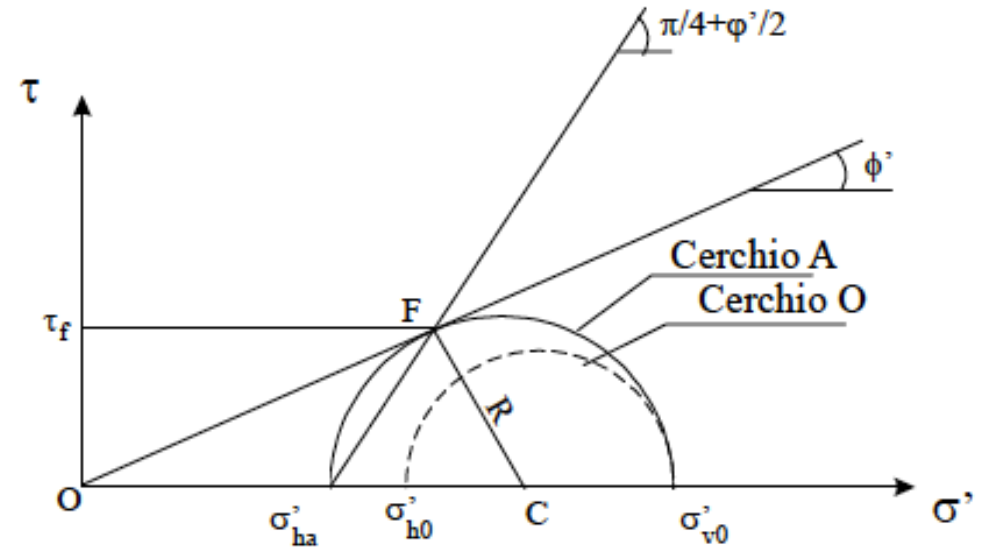
$$R = FC = OC \operatorname{sen} \phi'$$

$$\frac{1}{2} (\sigma'_{v0} - \sigma'_{hA}) = \frac{1}{2} (\sigma'_{v0} + \sigma'_{hA}) \operatorname{sen} \phi'$$

$$\sigma'_{hA} = \frac{1 - \operatorname{sen} \phi'}{1 + \operatorname{sen} \phi'} \sigma'_{v0} = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi'}{2} \right) \sigma'_{v0}$$

$$\sigma'_{hA} = K_A \sigma'_{v0}$$

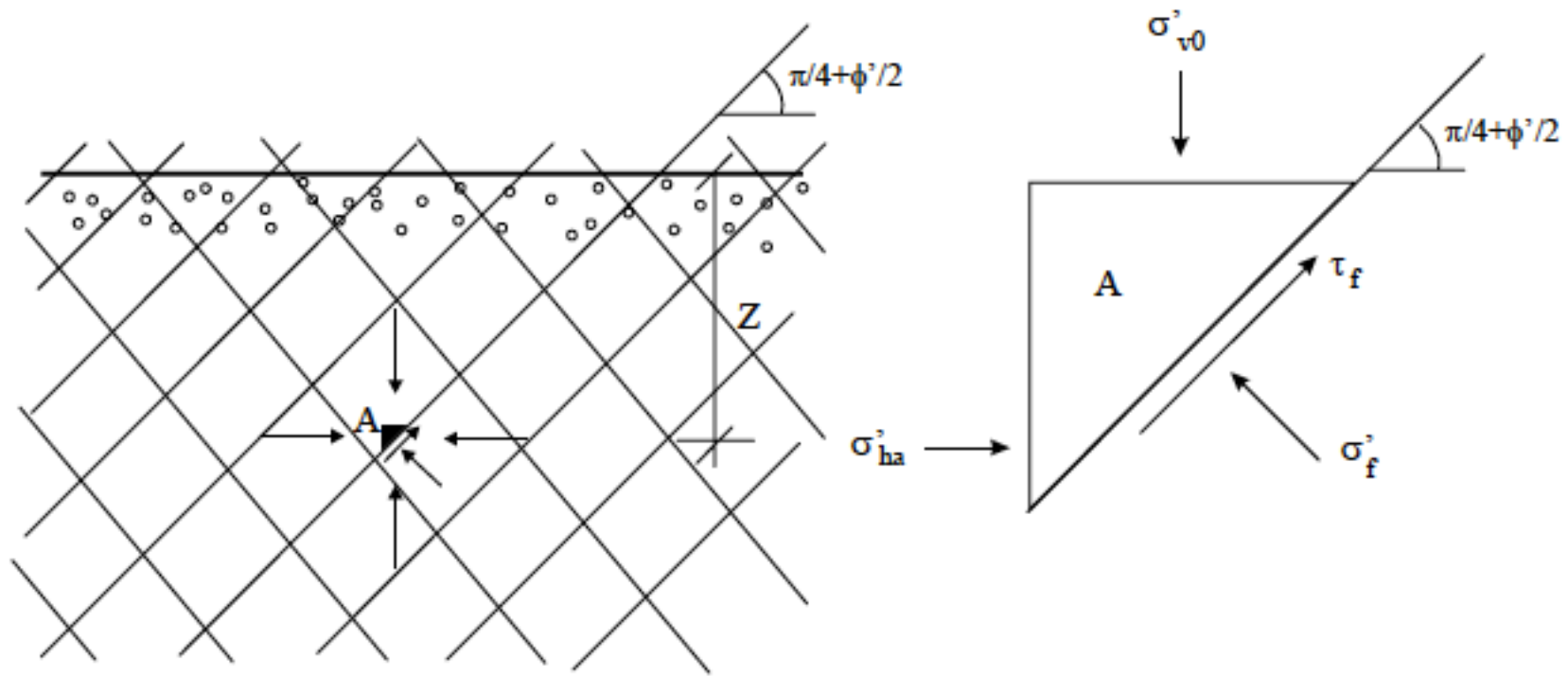
$$K_A = \frac{1 - \operatorname{sen} \phi'}{1 + \operatorname{sen} \phi'} = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi'}{2} \right)$$



COEFFICIENTE DI SPINTA ATTIVA

SPINTA ATTIVA

La tensione tangenziale critica, il cui valore τ_f è l'ordinata del punto F di tangenza del cerchio di Mohr con la retta di involuppo a rottura, agisce su un piano che forma un angolo di $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi'}{2}\right)$ con la direzione orizzontale.



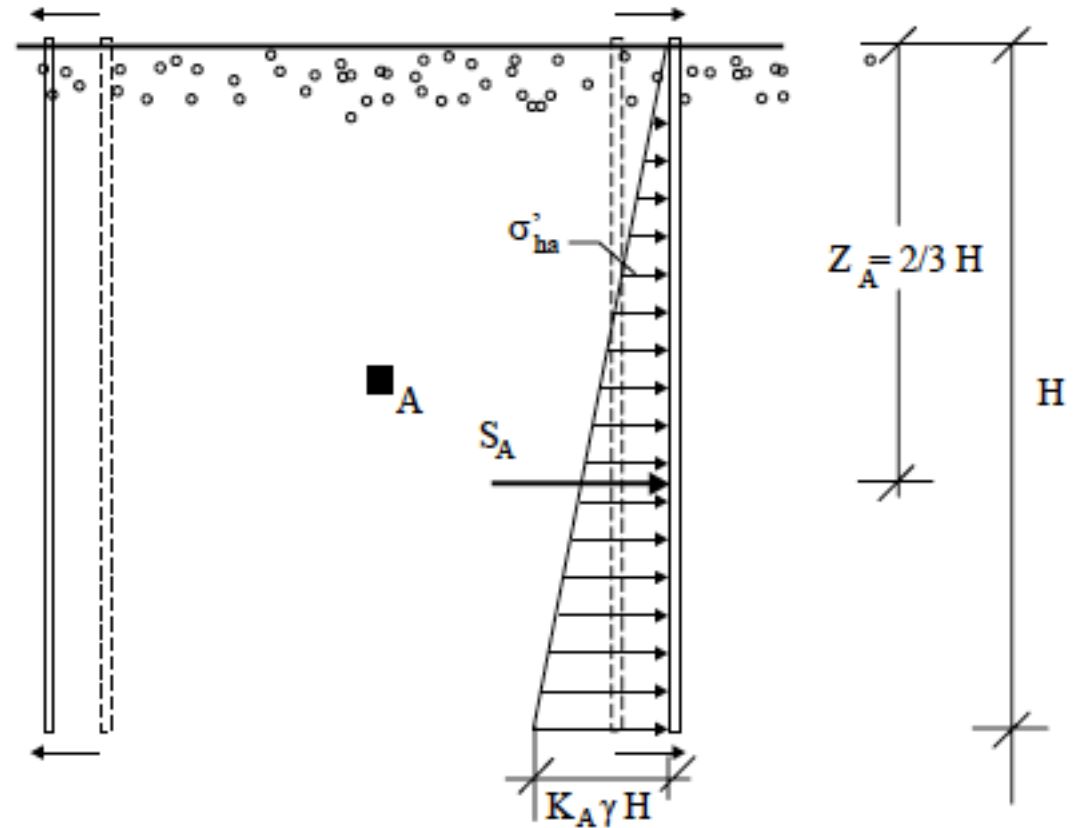
SPINTA ATTIVA

La spinta orizzontale S_A che si esercita sui due lati di ciascuna parete dalla superficie ad una generica profondità H , vale:

$$S_A = \int_0^H \sigma'_{ha} dZ = \frac{1}{2} \gamma H^2 K_A$$

La profondità Z_A della retta di applicazione di S_A , vale:

$$Z_A = \frac{\int_0^H \sigma'_{ha} Z dZ}{S_A} = \frac{2}{3} H$$

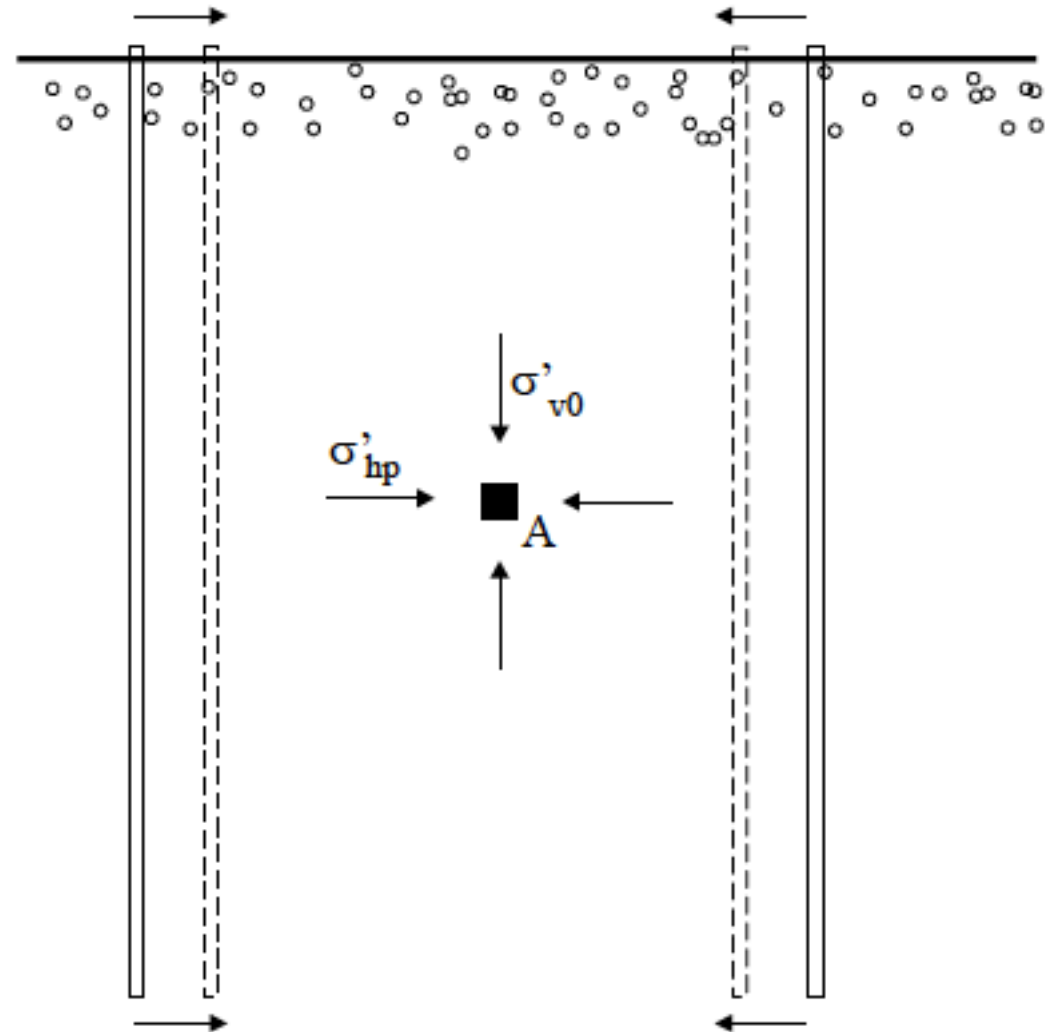


SPINTA PASSIVA

Stato tensionale limite passivo

Supponiamo ora di avvicinare gradualmente le due pareti:

- nel punto A permangono condizioni di simmetria (le tensioni verticale ed orizzontali sono ancora principali);
- la tensione verticale $\sigma'_{v0} = \gamma Z$ non varia
- la tensione orizzontale efficace cresce progressivamente.



SPINTA PASSIVA

Il valore massimo della tensione orizzontale compatibile, σ'_{hp} , compatibile con l'equilibrio è detto tensione limite passiva, e corrisponde alla tensione principale maggiore del cerchio di Mohr tangente alla retta di involuppo a rottura. Essendo:

$$R = 1/2 (\sigma'_{hp} - \sigma'_{v0})$$

$$OC = 1/2 (\sigma'_{v0} + \sigma'_{hp})$$

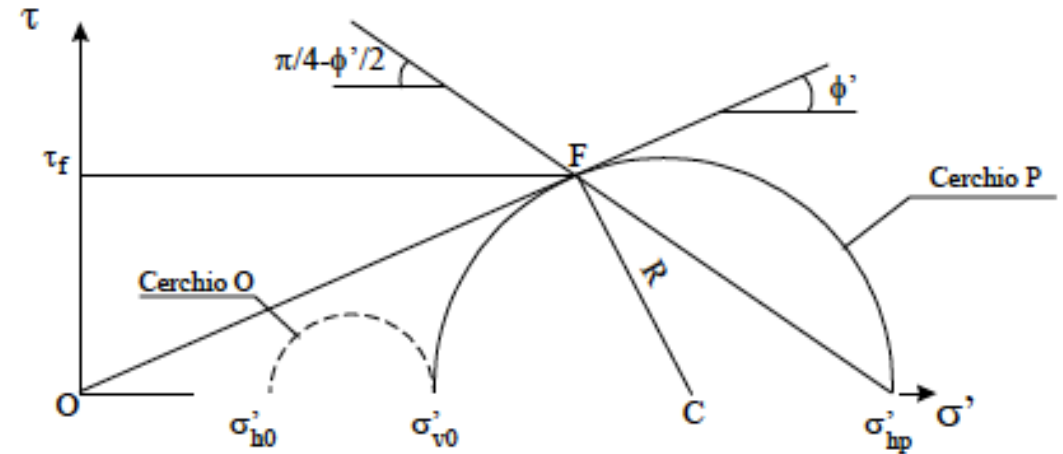
$$R = FC = OC \operatorname{sen} \phi'$$

$$1/2 (\sigma'_{hp} - \sigma'_{v0}) = 1/2 (\sigma'_{v0} + \sigma'_{hp}) \operatorname{sen} \phi'$$

$$\sigma'_{hp} = \frac{1 + \operatorname{sen} \phi'}{1 - \operatorname{sen} \phi'} \sigma'_{v0} = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi'}{2} \right) \sigma'_{v0}$$

$$\sigma'_{ha} = K_P \sigma'_{v0}$$

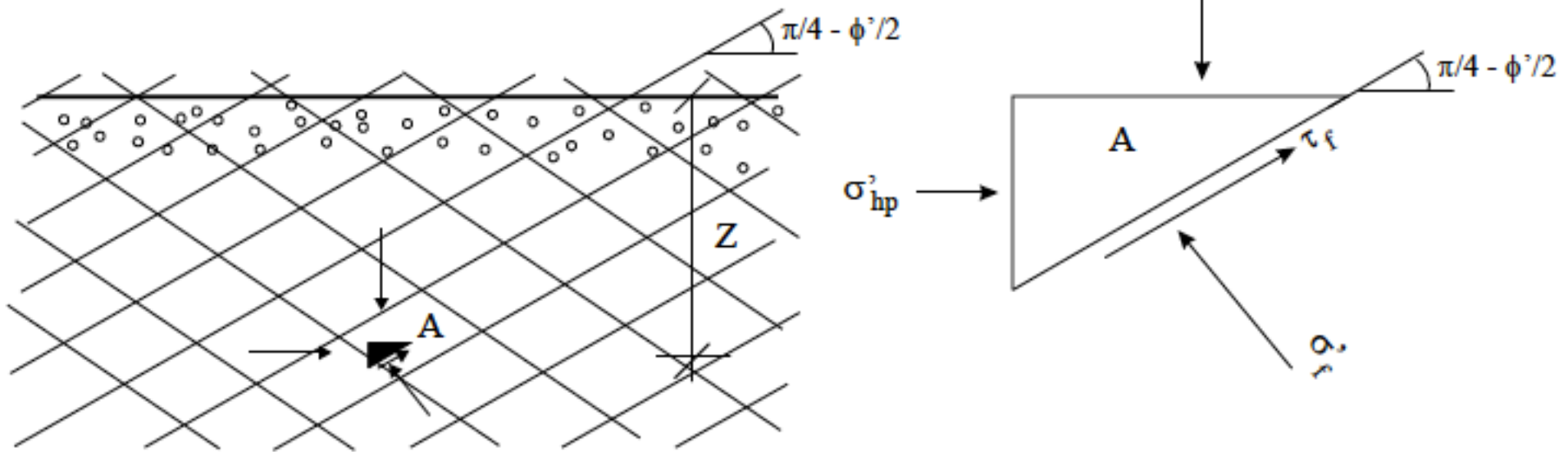
$$K_P = \frac{1 + \operatorname{sen} \phi'}{1 - \operatorname{sen} \phi'} = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi'}{2} \right)$$



COEFFICIENTE DI SPINTA PASSIVA

SPINTA PASSIVA

La tensione tangenziale critica, il cui valore τ_f è l'ordinata del punto F di tangenza del cerchio di Mohr con la retta di involuppo a rottura, agisce su un piano che forma un angolo di $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi'}{2}\right)$ con la direzione orizzontale.



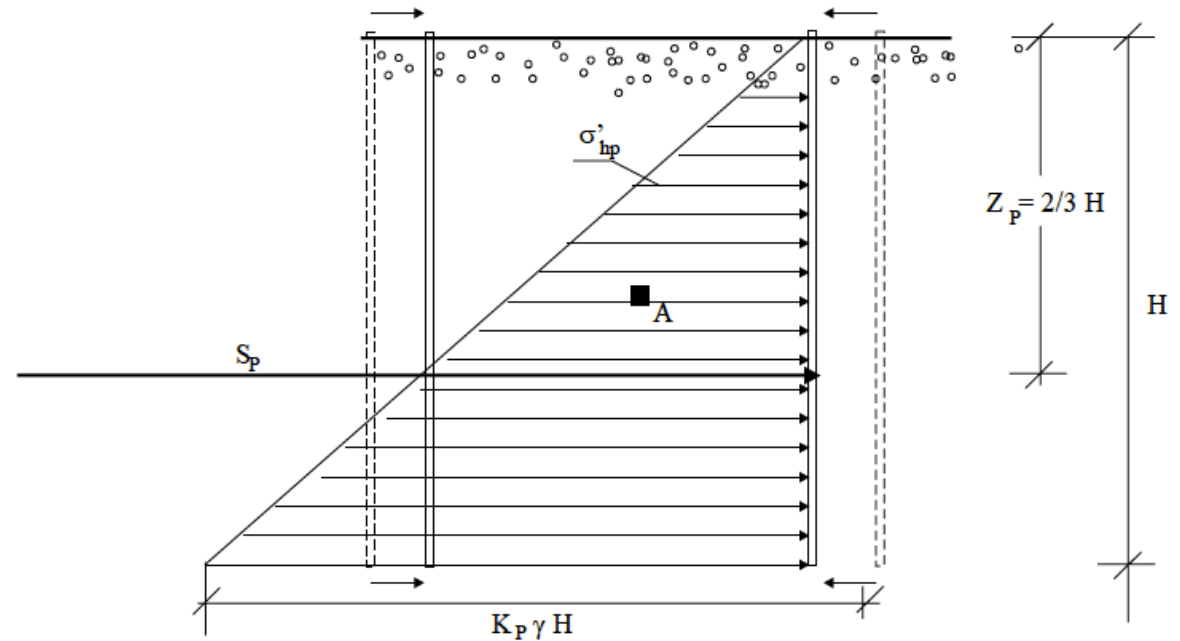
SPINTA PASSIVA

La spinta orizzontale S_A che si esercita sui due lati di ciascuna parete dalla superficie ad una generica profondità H , vale:

$$S_P = \int_0^H \sigma'_{hp} dZ = \frac{1}{2} \gamma H^2 K_P$$

La profondità Z_P della retta di applicazione di S_P , vale:

$$Z_P = \frac{\int_0^H \sigma'_{hp} Z dZ}{S_P} = \frac{2}{3} H$$

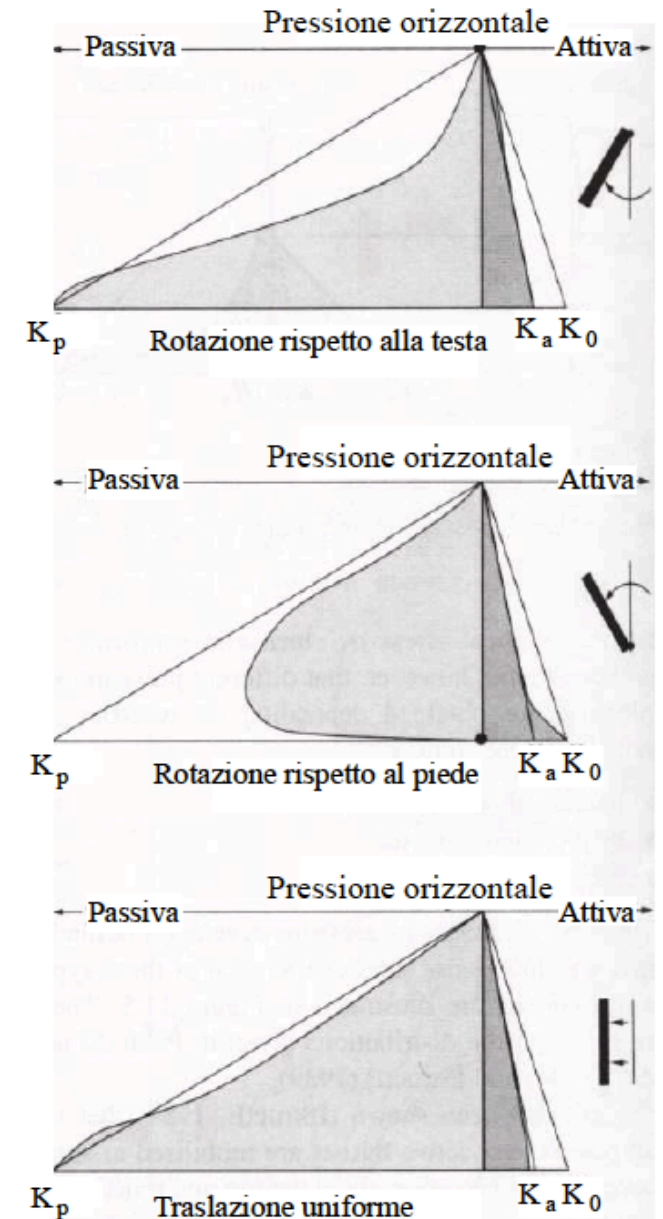


I coefficienti di spinta attiva, K_A , e passiva, K_P , rappresentano i valori limite, rispettivamente inferiore e superiore, del rapporto tra le tensioni efficaci orizzontale e verticale:

$$K_A \leq \frac{\sigma'_h}{\sigma'_{v0}} \leq K_P$$

Le deformazioni di espansione necessarie per far decadere la pressione orizzontale dal valore σ'_{h0} al valore limite inferiore σ'_{hA} , sono piccole, e comunque molto inferiori alle deformazioni di compressione necessarie per far elevare la pressione orizzontale dal valore σ'_{h0} , al valore limite superiore σ'_{hP} .

In genere si considera l'angolo di resistenza al taglio di picco per il calcolo della spinta attiva, e l'angolo di resistenza al taglio a volume costante per il calcolo della spinta passiva.



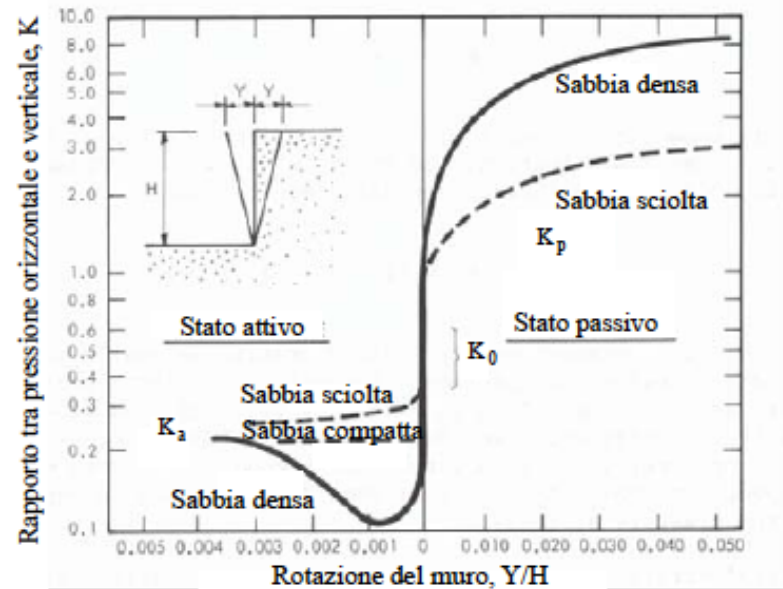


Figura 13.13 – Effetti del movimento della parete sulla pressione orizzontale esercitata da sabbia

Tabella 13.1: Entità delle rotazioni della parete per raggiungere la rottura (con riferimento ai simboli di Figura 13.13)

Terreno	Rotazione Y/H	
	Decompressione (Stato attivo)	Compressione (Stato passivo)
Incoerente denso	0,001	0,020
Incoerente sciolto	0,004	0,060
Coesivo consistente	0,010	0,020
Coesivo molle	0,020	0,040

EFFETTO DELLA COESIONE - SPINTA ATTIVA

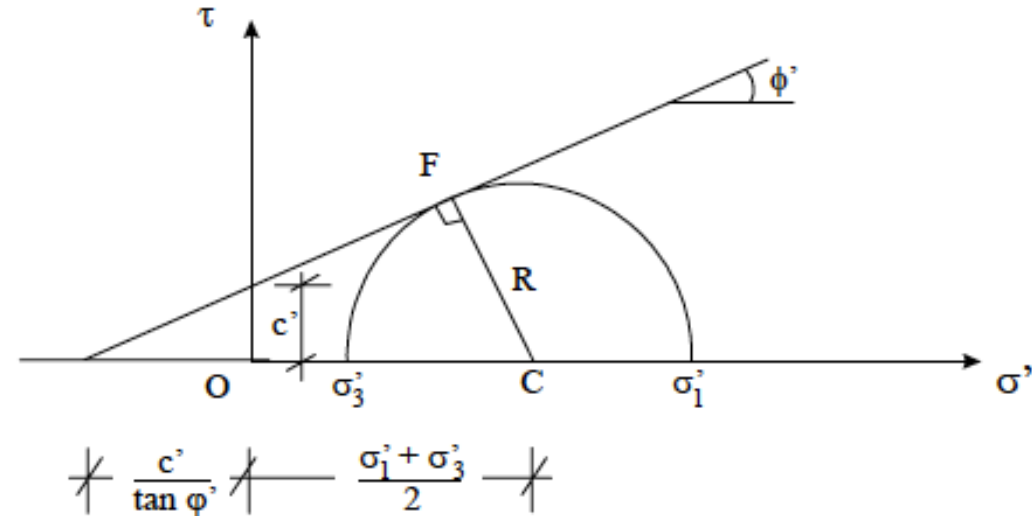
Si suppone che il deposito sia dotato anche di coesione oltre che di attrito, ovvero ha resistenza al taglio definita dal criterio di rottura di Mohr-Coulomb: ($\tau = c' + \sigma'_n \tan \phi'$)

$$\sigma'_1 = \sigma'_3 \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi'}{2} \right) + 2 c' \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi'}{2} \right)$$

$$\sigma'_3 = \sigma'_1 \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi'}{2} \right) + 2 c' \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi'}{2} \right)$$

$$\sigma'_{hA} = \gamma Z \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi'}{2} \right) - 2 c' \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi'}{2} \right) = \gamma Z K_A - 2 c' \sqrt{K_A}$$

$$\sigma'_{hP} = \gamma Z \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi'}{2} \right) + 2 c' \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi'}{2} \right) = \gamma Z K_P + 2 c' \sqrt{K_P}$$



La

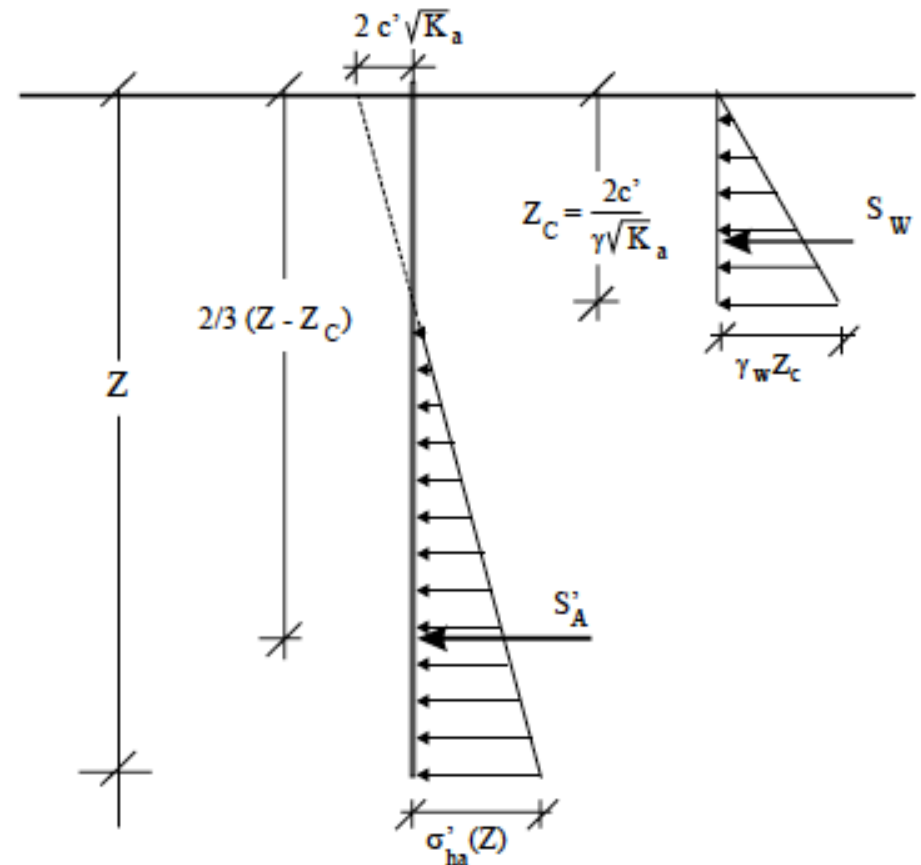
$$\sigma'_{hA} = \gamma Z \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi'}{2} \right) - 2 c' \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi'}{2} \right) = \gamma Z K_A - 2 c' \sqrt{K_A}$$

è valida per $Z > Z_c$, essendo Z_c la profondità critica per la quale risulta $\sigma'_{hA} = 0$ (il terreno non ha resistenza a trazione):

$$Z_c = \frac{2 c'}{\gamma \sqrt{K_A}}$$

mentre per $Z < Z_c$ si assume $\sigma'_{hA} = 0$

OSS. Nella fascia di spessore Z_c il terreno sarà interessato da fessure verticali di trazione che possono riempirsi di acqua. Si tiene conto di tale possibilità considerando, per il calcolo della spinta, anche un triangolo di pressione idrostatica di altezza Z_c e base $\gamma_w Z_c$

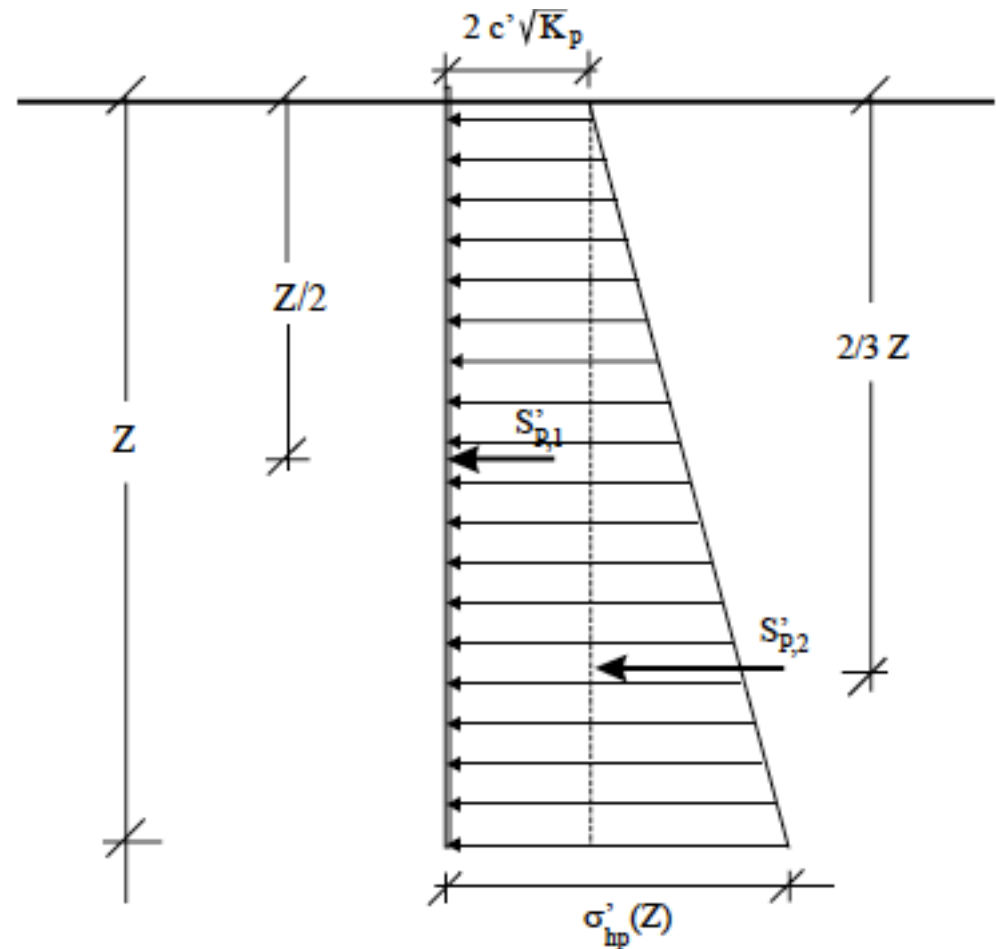


EFFETTO DELLA COESIONE - SPINTA PASSIVA

$$\sigma'_{hp} = \gamma Z \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi'}{2} \right) + 2 c' \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi'}{2} \right) = \gamma Z K_P + 2 c' \sqrt{K_P}$$

$$S_P(Z) = S_{P,1}(Z) + S_{P,2}(Z) = 2 c' \sqrt{K_P} Z + \frac{1}{2} \gamma Z^2 K_P$$

$$Z(S_P) = \frac{S_{P,1}(Z) \frac{Z}{2} + S_{P,2}(Z) \frac{2}{3} Z}{S_P(Z)}$$



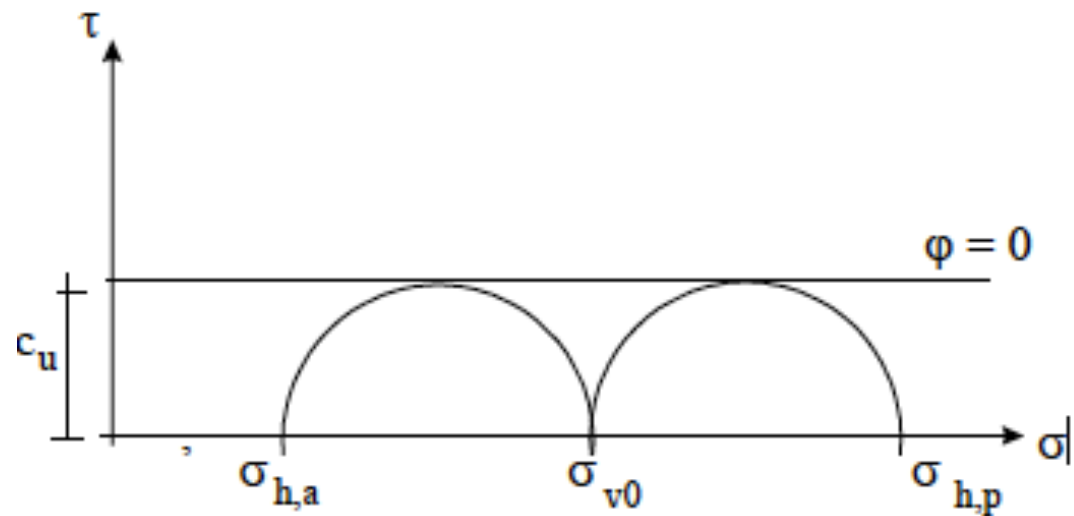
EFFETTO DELLA COESIONE CONDIZIONI NON DRENATE (A BREVE TERMINE)

Con riferimento a condizioni non drenate (a breve termine), come ad esempio nel caso di uno scavo a parte verticale, il criterio di rottura di Mohr-Coulomb viene applicato in termini di tensioni totali ($c = c_u$; $\phi = 0$).

La tensione limite attiva e passiva diventano rispettivamente:

$$\sigma_{hA} = \gamma Z - 2 c_u$$

$$\sigma_{hP} = \gamma Z + 2 c_u$$



Le superfici di rottura sono inclinate 45° rispetto all'orizzontale.

di

Effetto della eterogeneità

Si suppone che il deposito sia costituito da strati orizzontali omogenei

La spinta totale esercitata sulla parete verticale è la somma dei contributi di ciascuno strato.

Il diagramma delle pressioni orizzontali competenti a ciascuno strato in condizioni di spinta attiva è un trapezio

