Lezione 7 ottobre 2019

lunedì 7 ottobre 2019 11:59

SOTTOSPAZI VETTORIALI

Def. Sia V sp. vett. su K, e sia $W \subseteq V$, $W \neq \emptyset$.

W si dice SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI V se valgono:

SSV1 $\forall w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W$

SSV2 $\forall w \in W, \forall a \in K \Rightarrow a \cdot w \in W$

In questo caso diremo che W è CHIUSO RISPETTO ALLA SOMMA E AL PRODOTTO PER SCALARI.

OSS. Sia $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale; siccome $W \neq \emptyset \Rightarrow \exists w \in W$

per SSV2, anche $(-1) \cdot w \in W$

$= -w \in W$

per SSV1, ende $w + (-w) \in W$

$= \boxed{0 \in W}$

$\Rightarrow$ tutti i sottospazi vettoriali contengono il vettore nullo.

Esempio: $W = \{0\}$, dove 0 indica il vettore nullo

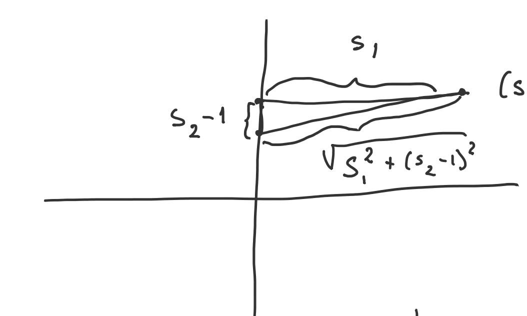
W è un sottosp. vettoriale e si chiama SOTTOSP. BANALE o NULLO.

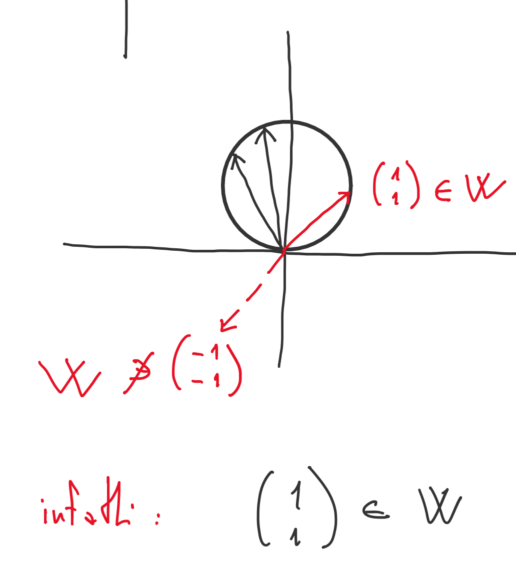
ESEMPI DI SOTTOINS. che NON SONO SOTTOSP. VETTORIALI

1. Cons. $V = \mathbb{R}^2$

e sia $W = \left\{ \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{s_1^2 + (s_2-1)^2}_{} = 1 \right\}$

$= \underbrace{(s_1 - 0)^2 + (s_2-1)^2}$ è il quadrato della distanza di un punto di coordinate (s_1, s_2) dal punto $(0, 1)$





NON È SOTTOSP. VETTORIALE

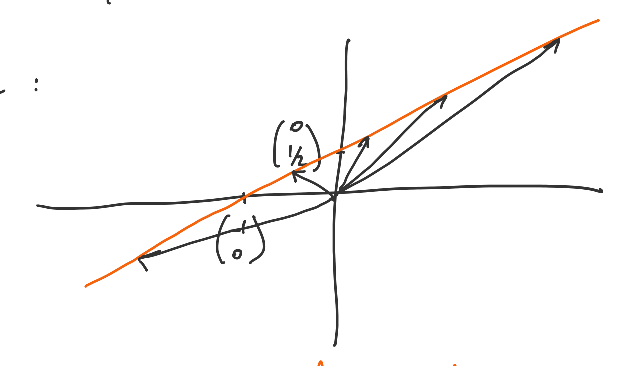
infatti: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W \quad : 1^2 + (1-1)^2 = 1$

ma $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \notin W \quad : (-1)^2 + (-1-1)^2 \neq 1$

$1 + 4 = 5$

2. $W = \left\{ \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : -s_1 + 2s_2 = 1 \right\}$

retta:



NON SOTTOSP. perché $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin W$

PROSSIMAM.: Tutti e soli i sottosp. vett. di $\mathbb{R}^2$

sono:
- (a) $\{0\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ sottosp. nullo
- (b) tutte le rette passanti per $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- (c) $\mathbb{R}^2$ stesso

ESEMPI DI SOTTOSPAZI VETTORIALI:

Esercizio: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $\qquad K = \mathbb{R}$

il sottoinsieme $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : ax + by = 0 \right\}$

OSS. Le rette di equazione $ax + by + c = 0$ con $c \neq 0$ NON determinano un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$; infatti non contengono $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Esempio: Sia $A \cdot X = 0$ sist. linea. omog.

Per il Teorema di Struttura (I°), l'insieme delle sue soluzioni è un sottospazio vettoriale di K^n.

OSS. Le rette di $\mathbb{R}^2$ passanti per l'origine posso essere cons. come insieme delle soluzioni del sist. lin. omog.

$ax + by = 0 \qquad \underset{1\times 2}{(a \ \ b)} \cdot \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = 0$

$A \cdot X = 0, \ A = (a \ \ b), \ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

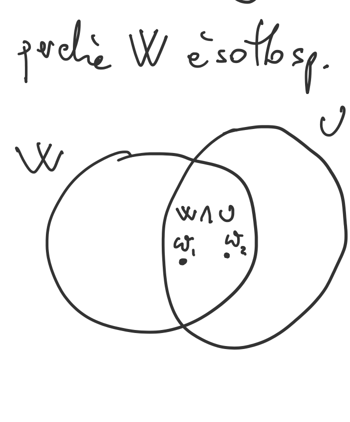
Lemma: Siano $W \subseteq V$, e $U \subseteq V$ 2 sottosp. vettoriali. Allora

$W \cap U$ è ancora sottosp. vettoriale.

Dim. SSV1: $w_1, w_2 \in W \cap U$ $\subseteq W$, $\subseteq U$

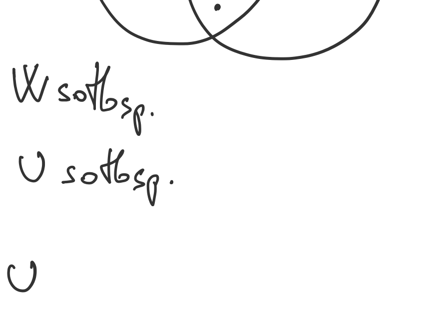
$\begin{cases} w_1 + w_2 \in W & \text{perché } W \text{ è sottosp.} \\ w_1 + w_2 \in U \end{cases}$

$w_1 + w_2 \in W \cap U$



SSV2 $w \in W \cap U$ $\subseteq W$, $\subseteq U$

$a \in K$



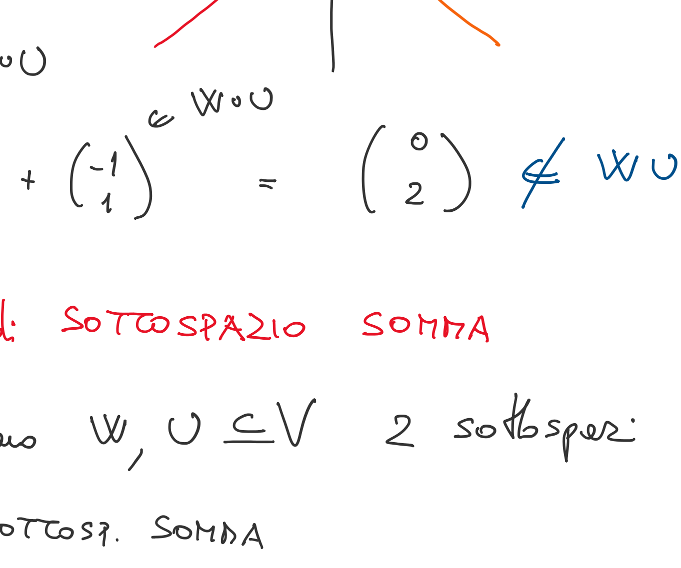
$a \cdot w \in W$ perché W sottosp.

$a \cdot w \in U$ " " U sottosp.

$\Rightarrow a \cdot w \in W \cap U$

OSS. L'UNIONE, invece, DI SOTTOSP. VETT. IN GENERALE $\boxed{\text{NON}}$ È SOTTOSP.

Controesempio: $\mathbb{R}^2$



$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}^{\in W \cup U} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}^{\in W \cup U} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \notin W \cup U$

Def. di SOTTOSPAZIO SOMMA

Siano $W, U \subseteq V$ 2 sottospazi

il SOTTOSP. SOMMA

$W + U := \left\{ v \in V : \begin{array}{l} v \text{ si può scrivere} \\ v = w + u \\ \text{con } w \in W, u \in U \end{array} \right\}$

OSSERVAZIONI:

1. $W + U$ è sottosp. vettoriale (esercizio)
2. $\left. \begin{array}{l} W + U \supseteq W \\ \quad\quad\ \ \supseteq U \end{array} \right\} \Rightarrow W + U \supseteq W \cup U$