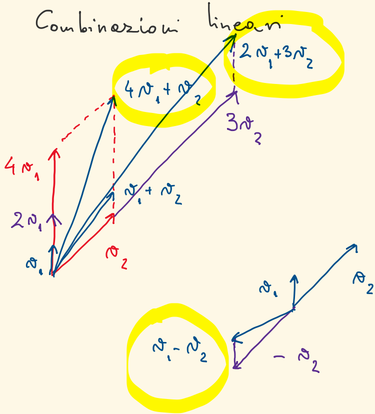
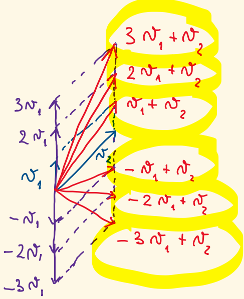
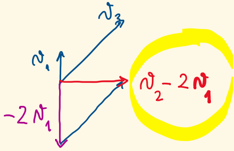
Lezione 9 ottobre 2019

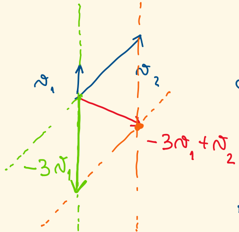
mercoledì 9 ottobre 2019 11:15

- Combinazioni lineari

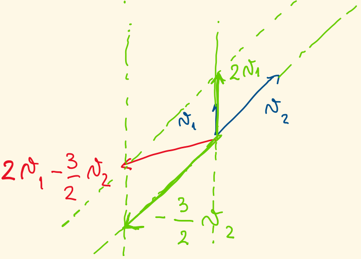








OSS: A partire da v_1 e v_2 così scelti, posso costruire TUTTI i vettori del piano tramite riscalamento e somma

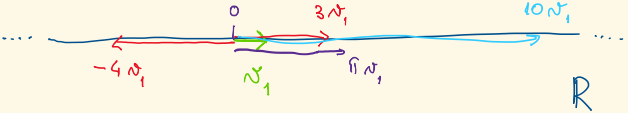


Def. : Un'espressione del tipo $a v_1 + b v_2$

con $a \in \mathbb{R}$ (oppure $\mathbb{K}$) e $b \in \mathbb{R}$ (opp. $\mathbb{K}$)

si dice COMBINAZIONE LINEARE DI v_1 e v_2

Altro esempio: retta reale



$3v_1 + (-4v_1) = -v_1$

$a \cdot v_1 + b \cdot v_1 = (a+b) \cdot v_1$: le combinazioni lineari di v_1 coincidono con i multipli scalari di v_1

Def. : Sia V sp. vettoriale su $\mathbb{K}$, e siano

$v_1, \dots, v_k$ k vettori di V.

Una COMBINAZIONE LINEARE DI $v_1, \dots, v_k$ è

un'espressione

$$c_1 v_1 + \dots + c_k v_k \quad \text{con} \quad c_1, \dots, c_k \in \mathbb{K}$$

Def. : Si dice SOTTOSPAZIO DI V GENERATO

DA $v_1, \dots, v_k$ l'insieme

$$\text{Span}(v_1, \dots, v_k) = \{ c_1 v_1 + \dots + c_k v_k \mid c_1, \dots, c_k \in \mathbb{K} \}$$

= l'insieme di tutte le combinazioni lineari di $v_1, \dots, v_k$, al variare di $c_1, \dots, c_k$ tra gli scalari

Esempi: • $v_1 =$ ↑ , $v_2 =$ ↗

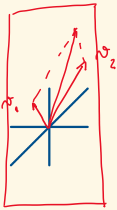
$\text{Span}(v_1, v_2) =$ tutto il piano "geometrico" reale

• $v_1 =$ →

$\text{Span}(v_1) = \{ c_1 v_1 : c_1 \in \mathbb{R} \}$

retta reale

• Nello spazio: $\text{Span}(v_1, v_2) =$ piano vettoriale determinato da v_1 e v_2



Proposizione: $\text{Span}(v_1, \dots, v_k)$ è un sottosp. vettoriale di V

Dim. Devo verificare SSV1 e SSV2:

SSV1 (chiuso risp. somme)

$c_1 v_1 + \dots + c_k v_k$ primo elemento

$b_1 v_1 + \dots + b_k v_k$ secondo elemento

$(c_1 v_1 + \dots + c_k v_k) + (b_1 v_1 + \dots + b_k v_k) =$

$\underbrace{(c_1 + b_1)}_{\in \mathbb{K}} v_1 + \dots + \underbrace{(c_k + b_k)}_{\in \mathbb{K}} v_k$ è combi. lin. di $v_1, \dots, v_k$

$\Rightarrow \in \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$

SSV2: $c_1 v_1 + \dots + c_k v_k$ elemento

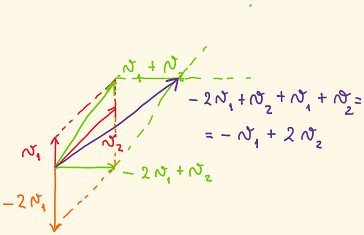
$a \in \mathbb{K}$

$a \cdot (c_1 v_1 + \dots + c_k v_k) =$

$= (a \cdot c_1) v_1 + \dots + (a \cdot c_k) v_k$ è ancora comb. lineare

$\Rightarrow \in \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$

Es:



OSS: 1. $\overset{\text{VETTORE NULLO}}{0} \in \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$

infatti: $0 = \underbrace{0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_k}_{\text{scalari } \in \mathbb{R}}$

2. Ogni vettore $v_1, \dots, v_k \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$

infatti:

$$v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_k$$

$$v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_k$$

$$\vdots$$

3. $v_1, \dots, v_k$, $l \le k$ (v_1, v_2, v_3)

e fisso $v_1, \dots, v_l$

$l = 2$

v_1, v_2

$$\mathrm{Span}(v_1, v_2) \subseteq \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3)$$

Allora:

$$\underset{\substack{\cup \\ u}}{\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_l)} \subseteq \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_l, \dots, v_k)$$

Infatti: se $u \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_l)$

$$u = c_1 v_1 + \cdots + c_l v_l$$

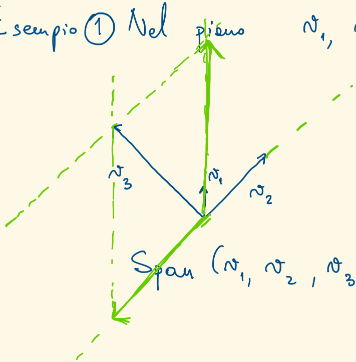
$$= c_1 v_1 + \cdots + c_l v_l + 0 \cdot v_{l+1} + \cdots + 0 \cdot v_k$$

$$\Rightarrow \quad u \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_l, \dots, v_k)$$

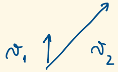
Problema: se $l < k$, è vero che

$$\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_l) \underset{\neq}{\subset} \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_l, \dots, v_k)?$$

Esempio ① Nel piano v_1, v_2, v_3



$$\mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3) = \boxed{\mathrm{Span}\left(v_1, v_2, 6v_1 - \tfrac{3}{2}v_2\right)}$$



$\mathrm{Span}(v_1, v_2)$

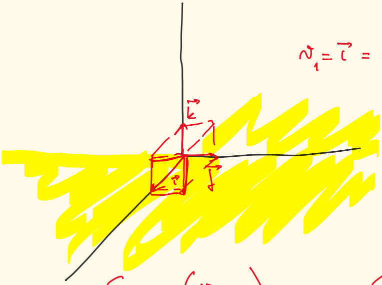
ma $\mathrm{Span}(v_1, v_2) = \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3)$

Quindi in questo caso la risposta al Problema è NO.

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 \left(6v_1 - \tfrac{3}{2} v_2\right)$$

$$= (c_1 + 6c_3) v_1 + \left(c_2 - \frac{3}{2} c_3\right) v_2$$

Esempio ② nello spazio: 3 vettori v_1, v_2, v_3



$v_1 = \vec{i} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $v_2 = \vec{j} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$v_3 = \vec{k} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\underset{\text{piano coordinato}}{\mathrm{Span}(\vec{i}, \vec{j})} \underset{\neq}{\subset} \mathrm{Span}(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) = \mathbb{R}^3$

Quindi in questo caso la risposta al Problema è sì.

Def. Siano dati $v_1, \dots, v_k$ vettori di V

Essi si dicono LINEARMENTE DIPENDENTI se uno di loro si può scrivere come combinazione lineare dei rimanenti.

Es. $\boxed{v_3 = 6v_1 - \frac{3}{2}v_2} \Rightarrow v_1, v_2, v_3$ sono lin. dipendenti

OSS.: $\rightarrow 6v_1 - \frac{3}{2}v_2 - v_3 = 0$

$\Rightarrow \exists$ una combinazione lineare con coeff. NON TUTTI NULLI t.c. mi dia il vettore nullo.

DEF. (Equivalente alla precedente)

$v_1, v_2, \dots, v_k$ si dicono LINEARMENTE

DIPENDENTI se ∃ una comb. lineare

$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_k v_k = 0$ che dia il

vettore nullo con $c_1, \dots, c_k$ NON TUTTI NULLI.

Def. $v_1, \dots, v_k$ vettori si dicono LINEARMENTE INDIPENDENTI se non sono lin. dipendenti

$$v_3 = 6v_1 - \frac{3}{2}v_2 \qquad \frac{3}{2}v_2 = 6v_1 - v_3$$

$$6v_1 = \frac{3}{2}v_2 + v_3 \qquad v_2 = 4v_1 - \frac{2}{3}v_3$$

$$v_1 = \frac{1}{4}v_2 + \frac{1}{6}v_3$$

Esercizio: dimostrare che nell'esempio ①

v_1, v_2 $\quad$ v_1, v_3 $\quad$, v_2, v_3

sono coppie di vettori lin. INDIP.

Infatti: in generale w_1, w_2 sono lin. DIPEND. se

$a_1 w_1 + a_2 w_2 = 0$ con a_1, a_2 non entrambi nulli

$a_2 \neq 0$

$$w_2 = \overset{\in K}{\boxed{-\frac{a_1}{a_2}}}\, w_1$$

Siccome nell'esempio ① i 3 vettori v_1, v_2, v_3 sono a due a due NON PROPORZIONALI (NON GIACCIONO SULLA STESSA RETTA VETTORIALE), essi sono a due a due linearmente indipendenti.