



Copertina

# Corso di Fisica dello Strato Limite Atmosferico

Le equazioni per i valori medi, quelle per le  
deviazioni

e

il problema della chiusura

Giaiotti Dario

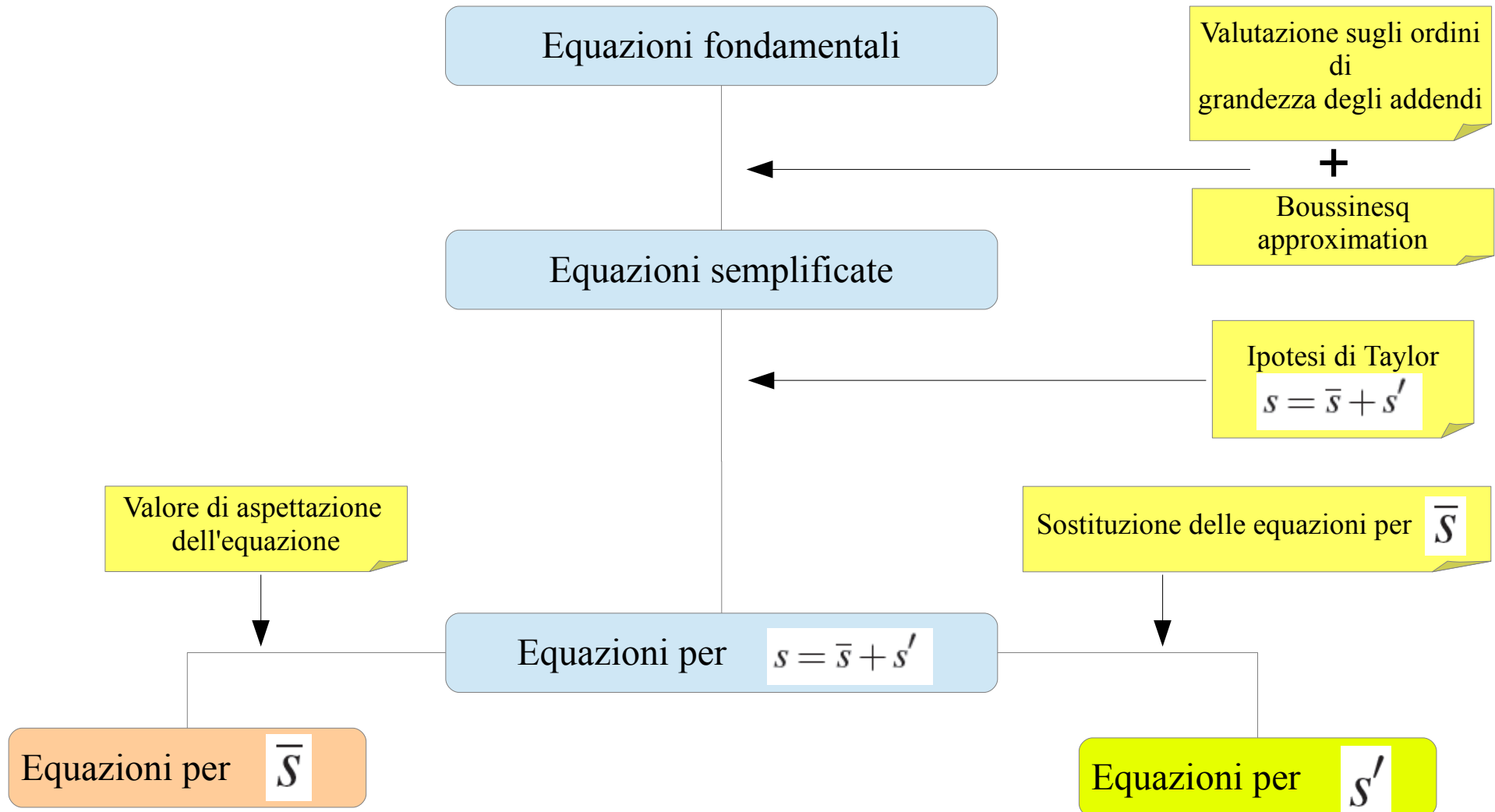
## Sommario della lezione

- Metodo per la formulazione delle equazioni fondamentali dell'ABL
- Il problema della chiusura dell'insieme delle equazioni e l'ordine della chiusura
- La necessità di parametrizzare i momenti di ordine superiore
- I tipi di parametrizzazione
- L'energia cinetica turbolenta
- La descrizione della stabilità ed i suoi parametri
- Bibliografia di riferimento e per approfondimenti.



## Il metodo usato per la formulazione delle equazioni fondamentali dell'ABL

Si utilizzano i principi di conservazione (massa, quantità di moto, energia, acqua) e l'ipotesi di Taylor sulla turbolenza, quindi l'approccio statistico.



## Le equazioni per i valori di aspettazione (valori medi)

Il termine avveztivo, della derivata materiale nelle equazioni di conservazione, introduce le covarianze tra le velocità e gli altri scalari che descrivono il flusso turbolento delle proprietà del fluido

Equazioni per  $\bar{S}$

$$\overline{u'_i s'} = E[u'_i s']$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{u'_i u'_j} \\ \overline{u'_i \theta'} \\ \overline{u'_i q'} \end{array} \right\}$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} = - \frac{\partial (\overline{u'_j \theta'})}{\partial x_j} + \kappa_T \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_j^2} + G(x_i, t)$$

Storage

Avvezione

Trasporto  
turbolento

Diffusione  
molecolare

Funzione  
sorgente

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_j} = - \frac{\partial (\overline{u'_j q'})}{\partial x_j} + \kappa_V \frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial x_j^2} + G(x_i, t)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial (\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_j} - \rho^{-1} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - g \delta_{i3} - 2\Omega \epsilon_{ijk} \eta_j \bar{u}_k + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2}$$

$$\tau'_{ij} = \rho \begin{bmatrix} \overline{u'_x u'_x} & \overline{u'_x u'_y} & \overline{u'_x u'_z} \\ \overline{u'_y u'_x} & \overline{u'_y u'_y} & \overline{u'_y u'_z} \\ \overline{u'_z u'_x} & \overline{u'_z u'_y} & \overline{u'_z u'_z} \end{bmatrix}$$

Tensore degli stress di Reynolds

(stress apparenti non associati a azioni fisiche)

## Le condizioni al contorno delle equazioni per i valori medi

Le condizioni al contorno per le equazioni ai valori medi dei campi sono le stesse usate per le equazioni originali:

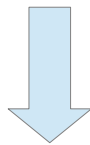
**No-slip condition** per le velocità alla superficie del mezzo confinante

$$\tau'_{ij} = \rho \begin{bmatrix} \overline{u'_x u'_x} & \overline{u'_x u'_y} & \overline{u'_x u'_z} \\ \overline{u'_y u'_x} & \overline{u'_y u'_y} & \overline{u'_y u'_z} \\ \overline{u'_z u'_x} & \overline{u'_z u'_y} & \overline{u'_z u'_z} \end{bmatrix} \rightarrow 0$$

Ciò che **non** si annulla alla superficie sono i gradienti dei campi, quindi anche i gradienti delle deviazioni.

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} + \frac{\partial T'}{\partial x_i}$$



Alla superficie gli sforzi sono prodotti solo dalla viscosità

## Le equazioni di ordine superiore al primo

Le equazioni di ordine superiore al primo si ottengono dalle equazioni per le deviazioni eseguendo delle operazioni lineari (somme) e non (prodotti) e calcolando il valore di aspettazione.

Esempio dell'equazione per gli elementi dello stress di Reynolds

Utilizzando una equazione scalare per le deviazioni delle velocità (componente i), la si moltiplica per un'altra componente (k) della deviazione. Si esegue la stessa procedura scambiando gli indici utilizzando l'equazione per le deviazioni della componente scalare (k).

$$u'_k \cdot \left[ \begin{aligned} &\partial u'_i / \partial t + \partial (\bar{u}_j u'_i + \bar{u}_i u'_j + u'_i u'_j - \overline{u'_i u'_j}) / \partial x_j \\ &= -\rho^{-1} \partial p' / \partial x_i + (\rho' / \rho^2) \partial \bar{p} / \partial x_i - 2\Omega \varepsilon_{ijk} \eta_j u'_k + \nu \partial^2 u'_i / \partial x_j^2 \end{aligned} \right]$$

Si **sommano le due equazioni** e se ne **calcola il valore di aspettazione**.

Si ottiene l'equazione per  $\overline{u'_i u'_k}$

$$\begin{aligned} \overline{\partial u'_i u'_k} / \partial t + \bar{u}_j \overline{\partial u'_i u'_k} / \partial x_j &= -\overline{u'_k u'_j} \partial \bar{u}_i / \partial x_j - \overline{u'_i u'_j} \partial \bar{u}_k / \partial x_j - \overline{\partial u'_i u'_j u'_k} / \partial x_j \\ &+ (g / \bar{\theta}_v) (\overline{u'_i \theta'_v} \delta_{3k} + \overline{u'_k \theta'_v} \delta_{3i}) - 2\Omega \eta_j (\varepsilon_{ijl} \overline{u'_k u'_l} + \varepsilon_{kjl} \overline{u'_l u'_i}) \\ &- \rho^{-1} (\overline{u'_k \partial p'} / \partial x_i + \overline{u'_i \partial p'} / \partial x_k) + \nu (\overline{u'_k \partial^2 u'_i} / \partial x_j^2 + \overline{u'_i \partial^2 u'_k} / \partial x_j^2). \end{aligned}$$

Si genera una nuova variabile, un momento statistico del terzo ordine che deve essere noto.

**Abbiamo aggiunto un nuovo campo, il quale va descritto. L'insieme delle equazioni NON è chiuso**

## L'ordine della chiusura dell'insieme delle equazioni

L'ordine della chiusura dell'insieme delle equazioni è dato dall'ordine dei momenti risolti esplicitamente nelle equazioni

Usate nei modelli	Ordine	Momenti esplicitati	Momenti parametrizzati
	1	Valori medi $\overline{u_j}$ $\overline{\theta}$	Covarianze $\overline{u'_i u'_j}$ $\overline{u'_i \theta'}$ $\overline{u'_i q'}$
2	Valori medi Covarianze $\overline{u_j}$ $\overline{\theta}$ $\overline{u'_i u'_j}$ $\overline{u'_i \theta'}$ $\overline{u'_i q'}$	Misti e omogenei di 3 deviazioni $\overline{u'_i u'_j \theta'}$ , $\overline{u'_i u'_j u'_k}$	
Solo esperimenti	3	Valori medi Covarianze Misti e omogenei di 3 deviazioni	Misti e omogenei di 4 deviazioni

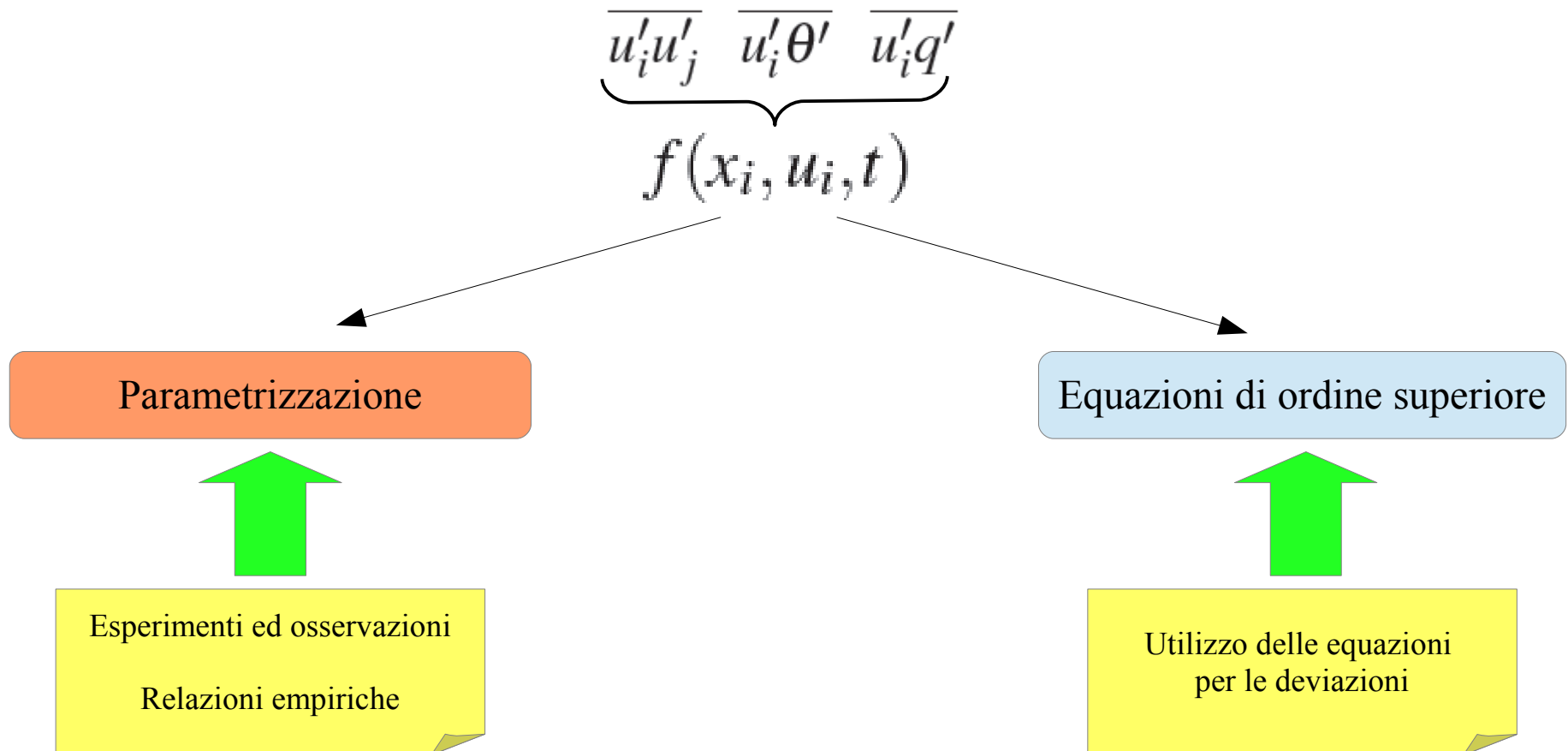
## Ordine della chiusura numero di equazioni e numero di incognite

Progn. Eq. for:	Moment	Equation	No. Eqs.	No. Unknowns
$\overline{U_i}$	primo	$\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial t} = \dots - \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j}$	3	6
$\overline{u'_i u'_j}$	secondo	$\frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} = \dots - \frac{\partial \overline{u'_k u'_i u'_j}}{\partial x_k}$	6	10
$\overline{u'_i u'_j u'_k}$	terzo	$\frac{\partial \overline{u'_i u'_j u'_k}}{\partial t} = \dots - \frac{\partial \overline{u'_k u'_i u'_j u'_m}}{\partial x_m}$	10	15



## Il problema della chiusura dell'insieme delle equazioni

Le correlazioni presenti nelle equazioni per i valori medi sono funzioni che non dipendono dalle proprietà del fluido, bensì dal moto del fluido, quindi dalla posizione, dalle velocità ecc.



## Necessariamente si deve parametrizzare i campi (momenti statistici) di ordine superiore

Ci sono due possibili parametrizzazioni: con schema locale e con schema non locale

### Schema di chiusura locale

Le incognite sono funzioni di campi noti **nello stesso punto dello spazio** per il quale sono definite le incognite

Solitamente sono nella forma di flussi di gradienti

$$\overline{u_j' s'} = - K_s \partial \bar{s} / \partial x_j$$

(analogia con la diffusione molecolare)

Sono state estese fino al **terzo ordine**, ma praticamente si usano il **primo** ed il **secondo**

### Schema di chiusura NON locale

Le incognite sono funzioni di campi noti **in una regione dello spazio**, contenente o nei pressi del **punto** per il quale sono definite le incognite

Solitamente sono nella forma di integrali o valori medi

(in pratica sono state applicate solo lungo la verticale del punto)

Sono state utilizzate solo al **primo** ordine

## Esempi di chiusura locale al primo ordine (K-closure)

$$\tau_x = - \overline{\rho u' w'} = \rho K_M \partial \bar{u} / \partial z$$

$$\tau_y = - \overline{\rho v' w'} = \rho K_M \partial \bar{v} / \partial z$$

$$H_v = \rho c_p \overline{w' \theta_v'} = - \rho c_p K_H \partial \bar{\theta}_v / \partial z$$

$$E = \overline{\rho w' q'} = - \rho K_w \partial \bar{q} / \partial z$$

 $K_M$ 

Viscosità turbolenta

 $K_H$ 

Diffusività termica turbolenta

 $K_w$ 

Diffusività turbolenta del vapore

## Svantaggi della chiusura locale del primo ordine (K-closure).

Solitamente  $K_M \approx 1 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$  quindi  $\gg \nu \approx 10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$  da cui  $K_M/\nu \approx Re$

La K-closure ha dato ottimi risultati nel caso di turbolenza con vortici di “piccole” dimensioni aventi lunghezze tipiche che sono minori rispetto alle lunghezze scala dei gradienti presenti

Particolarmente **indicata** per situazioni di ABL stabile o a stratificazione neutra

**Fallisce** in situazioni di ABL molto instabile o altamente convettivo

## Esempi di chiusura NON locale al primo ordine (K-closure)

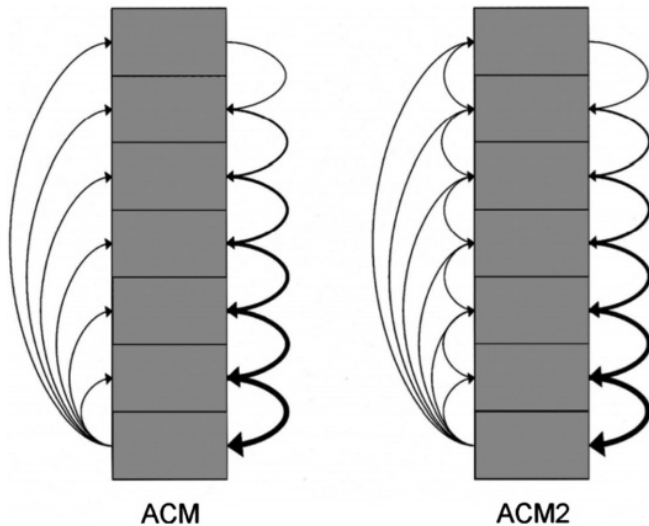


FIG. 2. Depiction of the mechanics of the ACM and ACM2 schemes regarding PBL interactions [from Pleim (2007a)]. Arrows depict exchanges of atmospheric quantities between various layers within the simulated PBL.

Nonlocal closure schemes have been successful at simulating convective boundary layer fluxes and profiles. Many PBL schemes simply add a gradient adjustment term ( $\gamma_h$ ) to the eddy diffusion equation (Deardorff 1966; Troen and Mahrt 1986; Holtslag and Boville 1993; Noh et al. 2003),

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} (\overline{w'\theta'}) = \frac{\partial}{\partial z} \left[ -K_h \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} - \gamma_h \right) \right], \quad (1)$$

where  $K_h$  is the vertical eddy diffusivity for heat,  $\theta$  is the potential temperature, and  $\overline{w'\theta'}$  represents the kinematic heat flux. Note that these schemes were originally

$\frac{1}{2}$ ). The nonlocal scheme for any scalar  $C_i$  (mass mixing ratio) in model layer  $i$  is given by

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = \text{Mu}C_1 - \text{Md}_i C_i + \text{Md}_{i+1} C_{i+1} \frac{\Delta z_{i+1}}{\Delta z_i}, \quad (3)$$

which is identical to Eq. (3) in Pleim and Chang (1992), except that here the vertical dimension is expressed as height above ground ( $z$ ) rather than  $\sigma$ . Here,  $\text{Mu}$  is the upward convective mixing rate,  $\text{Md}_i$  is the downward mixing rate from layer  $i$  to layer  $i - 1$ ,  $C_1$  is the mixing ratio in layer 1 (the lowest model layer), and  $\Delta z_i$  is the thickness of layer  $i$ . The downward mixing rate  $\text{Md}_i$  is

Locale

NON locale

## Svantaggi della chiusura NON locale del primo ordine

Gli schemi non locali sono computazionalmente intensivi e spesso richiedono parametri aggiuntivi, per esempio tabelle sull'uso del suolo

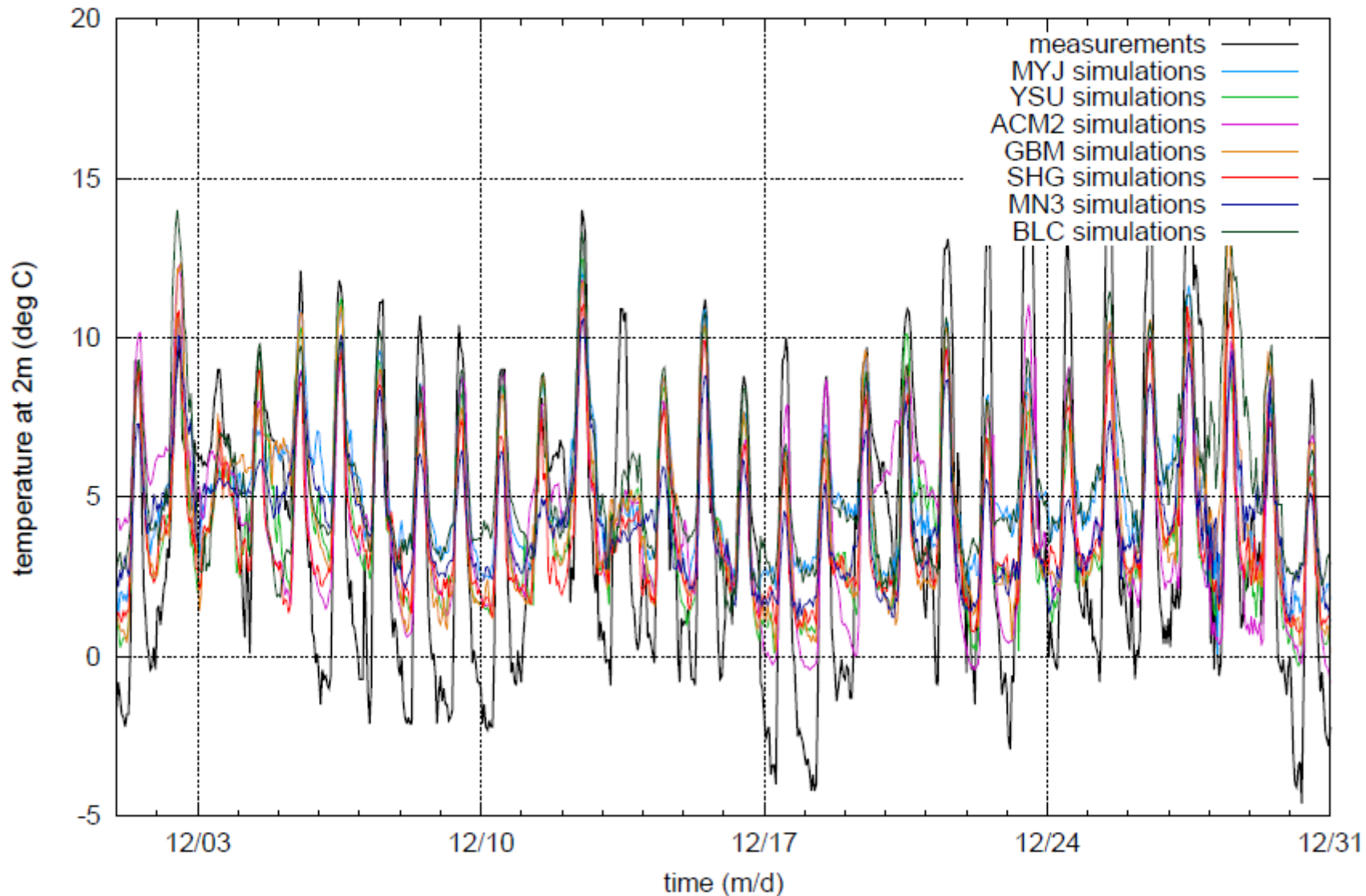
Si osservano problemi saltuari, non sistematici e difficili da interpretare, quindi da affrontare

Particolarmente indicata per situazioni di ABL molto instabile in cui l'entrainment è importante nelle transizioni tra giorno e notte

## Schemi di chiusura a confronto utilizzando il modello numerico WRF: Temperatura

Confronto con la realtà in area di pianura - inverno

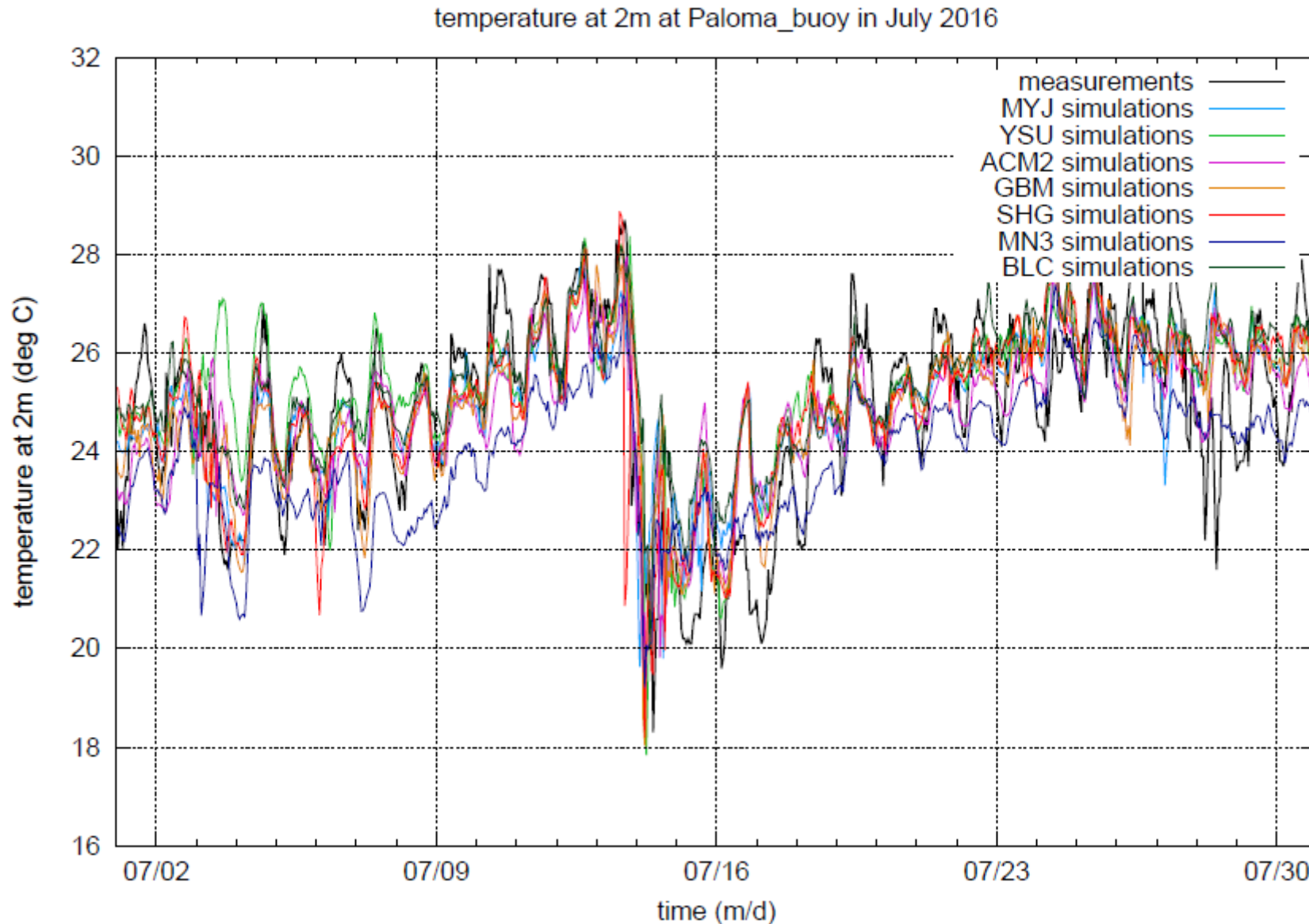
temperature at 2m at Udine in December 2016





## Schemi di chiusura a confronto utilizzando il modello numerico WRF: Temperatura

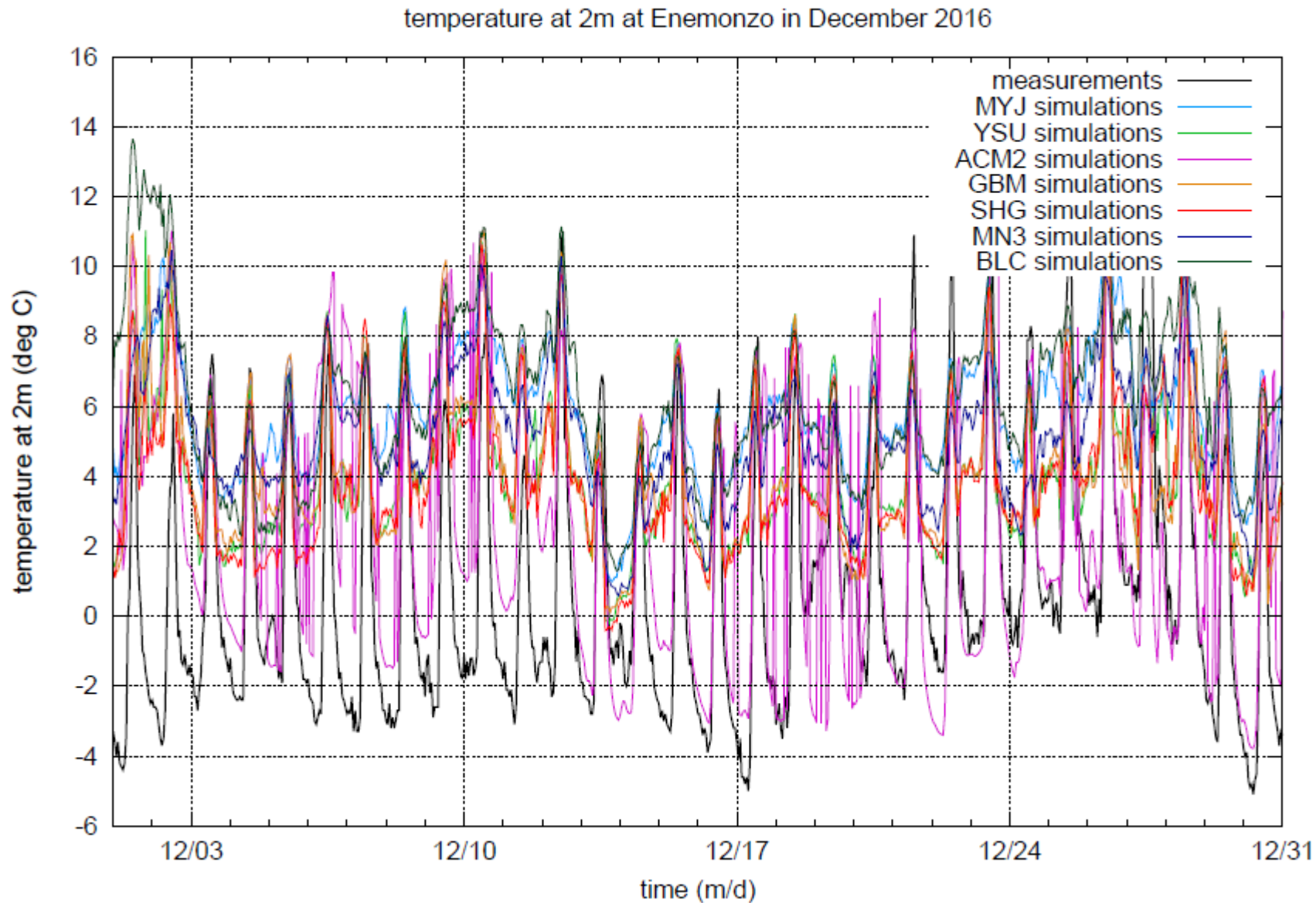
Confronto con la realtà in mare aperto e periodo estivo





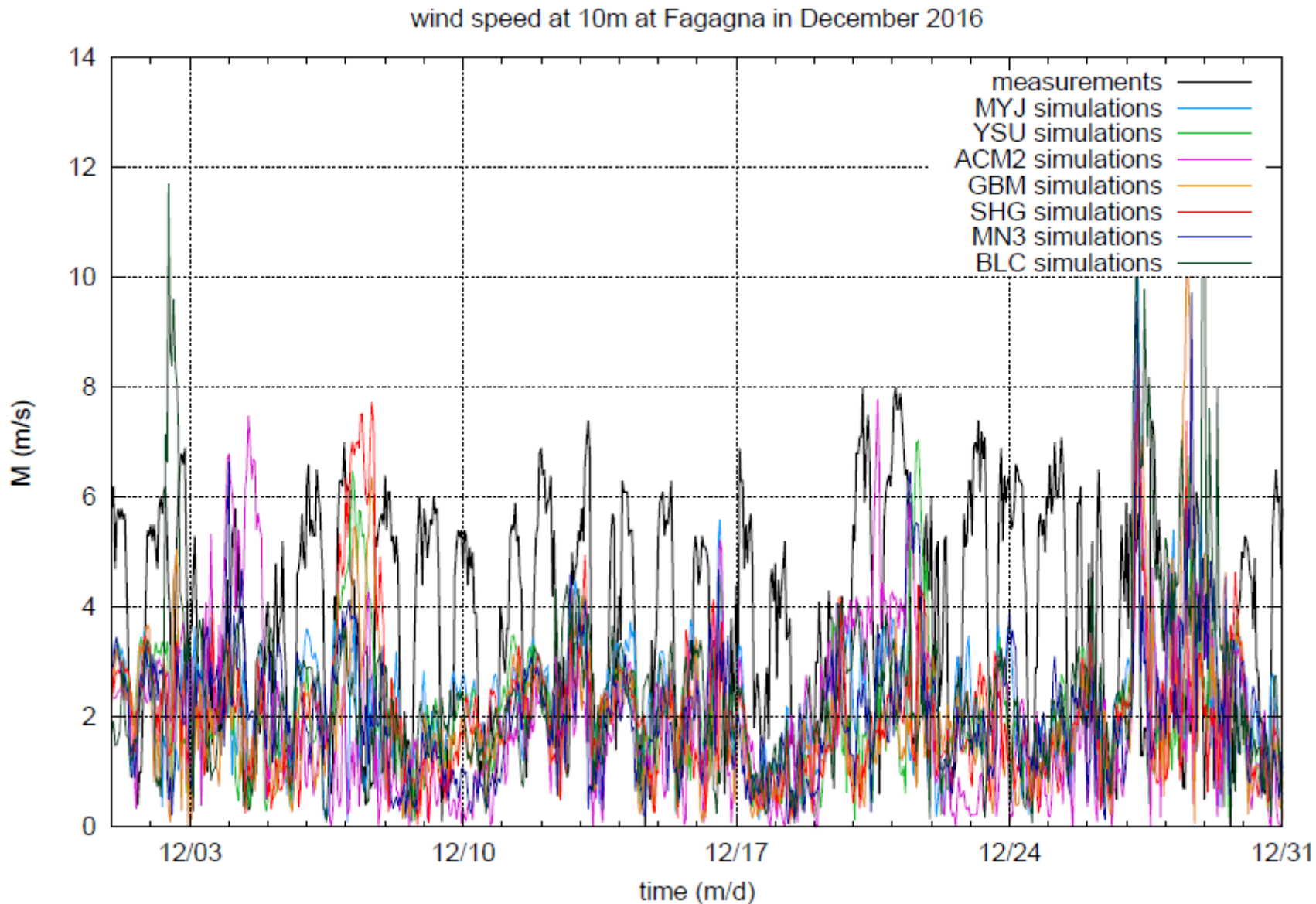
## Schemi di chiusura a confronto utilizzando il modello numerico WRF: Temperatura

Confronto con la realtà in valle montana e in inverno



## Schemi di chiusura a confronto utilizzando il modello numerico WRF: vento (modulo)

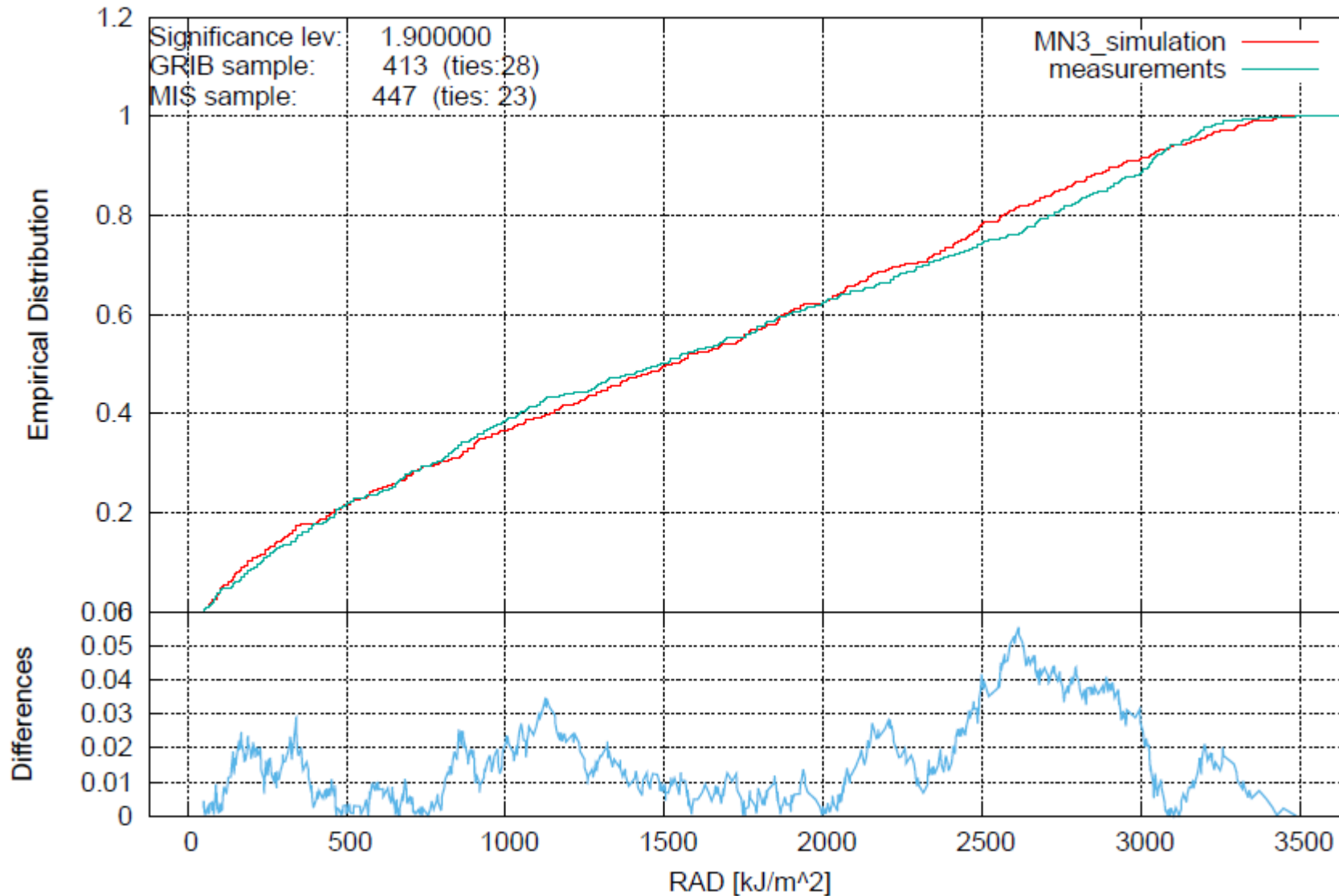
Confronto con la realtà in area di pianura



## Schemi di chiusura a confronto utilizzando il modello numerico WRF: radiazione solare

Confronto con la realtà in area di pianura

Kolmogorov-Smirnov test ( STZ: UDI - VAR: RAD - T: 20160701 20160731 )



## Esistono anche schemi con chiusura parziale ad un ordine

Gli schemi chiamati di ordine 1 e 1/2 sono schemi in cui le equazioni per le varianze sono trattate in modo esplicito assieme ai campi medi, mentre il resto dei momenti del secondo ordine sono parametrizzati localmente

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} &= f_c(\bar{V} - \bar{V}_g) - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \\ \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} &= -f_c(\bar{U} - \bar{U}_g) - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \\ \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} &= -\frac{\partial \overline{\theta'w'}}{\partial z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} &= -\overline{u'w'} \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} - \overline{v'w'} \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} + \frac{g}{\bar{\theta}} \overline{w'\theta'} - \frac{\partial [\overline{w'((p'/\rho) + e)}]}{\partial z} - \epsilon \\ \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial t} &= -2\overline{w'\theta'} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} - \frac{\partial \overline{w'\theta'^2}}{\partial z} - 2\epsilon_\theta - \epsilon_R\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{u'w'} &= -K_m(\bar{e}, \bar{\theta}'^2) \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \\ \overline{v'w'} &= -K_m(\bar{e}, \bar{\theta}'^2) \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} \\ \overline{\theta'w'} &= -K_H(\bar{e}, \bar{\theta}'^2) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} - \gamma_c(\bar{e}, \bar{\theta}'^2) \\ \overline{w'[(p'/\rho) + e]} &= (5/3)\Lambda_4 e^{-1/2} \frac{\partial \bar{e}}{\partial z} \\ \overline{w'\theta'^2} &= \Lambda_3 e^{-1/2} \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial z} \\ \epsilon_R &= 0 \\ \epsilon &= \frac{\bar{e}^{3/2}}{\Lambda_1} \\ \epsilon_\theta &= \frac{\bar{e}^{1/2} \overline{\theta'^2}}{\Lambda_1} \\ K &\approx \Lambda \bar{e}^{1/2}\end{aligned}$$



## Energia cinetica turbolenta (TKE)

Definizione di energia cinetica turbolenta  $\bar{e} = \overline{u_i'^2}/2 = (\overline{u'^2 + v'^2 + w'^2})/2.$

Derivazione dell'equazione prognostica: utilizzando l'equazione per le deviazioni e  $i=k$ , poi sommandole tutte e tre per ogni  $i = 1,2,3$

$$\begin{aligned} \overline{\partial u_i' u_k' / \partial t} + \bar{u}_j \overline{\partial u_i' u_k' / \partial x_j} = & - \overline{u_k' u_j' \partial \bar{u}_i / \partial x_j} - \overline{u_i' u_j' \partial \bar{u}_k / \partial x_j} - \overline{\partial u_i' u_j' u_k' / \partial x_j} \\ & + (g/\bar{\theta}_v)(\overline{u_i' \theta_v' \delta_{3k}} + \overline{u_k' \theta_v' \delta_{3i}}) - 2\Omega \eta_j (\varepsilon_{ijl} \overline{u_k' u_l'} + \varepsilon_{kjl} \overline{u_l' u_i'}) \\ & - \rho^{-1} (\overline{u_k' \partial p' / \partial x_i} + \overline{u_i' \partial p' / \partial x_k}) + \nu (\overline{u_k' \partial^2 u_i' / \partial x_j^2} + \overline{u_i' \partial^2 u_k' / \partial x_j^2}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial \bar{e} / \partial t + \bar{u}_j \partial \bar{e} / \partial x_j \\ = - \overline{u_i' u_j' \partial \bar{u}_i / \partial x_j} + (g/\bar{\theta}_v) \overline{u_i' \theta_v' \delta_{3i}} - \overline{\partial e u_j' / \partial x_j} - \rho^{-1} \overline{\partial p' u_i' / \partial x_i} - \varepsilon \end{aligned}$$

Dove la dissipazione molecolare della TKE, dovuta alla viscosità del fluido, è stata espressa:

$$\varepsilon = - \overline{\nu u_i' \partial^2 u_i' / \partial x_j^2} \approx \nu \overline{(\partial u_i' / \partial x_j)^2}$$

## Dissipazione dell'energia cinetica turbolenta per interazione molecolare

la dissipazione molecolare della TKE è molto importante nei pressi della superficie terrestre

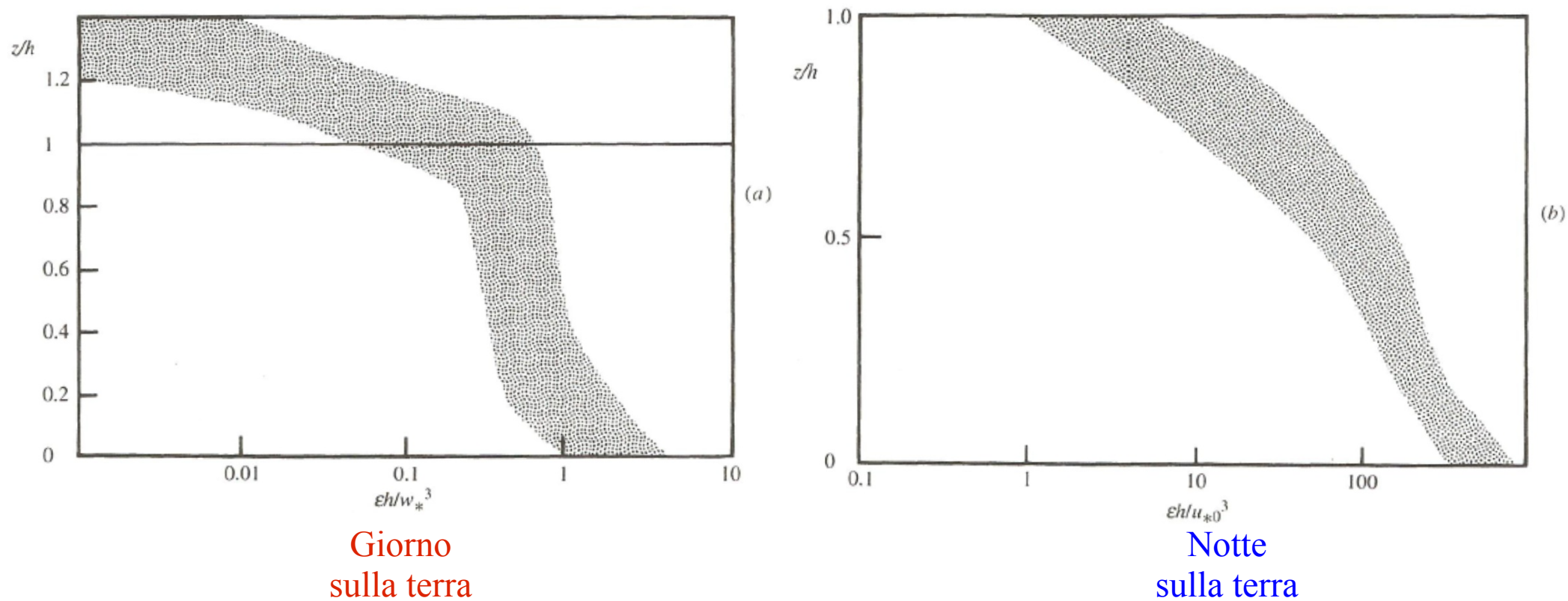


Fig. 2.3 Vertical profiles of the normalized dissipation rate for (a) daytime and (b) night-time conditions over land, with the shaded regions indicating the likely spread of individual observations. Data are from Caughey *et al.* (1979) and Kitchen *et al.* (1983), with  $h$  the ABL depth,  $u_{*0}$  the surface friction velocity and  $w_*$  the convective velocity scale. After Stull (1988); reprinted by permission of Kluwer Academic Publishers.

## Caso di omogeneità orizzontale

$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} = - \overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \overline{v'w'} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + (g/\theta_v) \overline{w'\theta_v'} - \partial(\overline{w'e} + \overline{w'p'}/\rho)/\partial z - \varepsilon$$

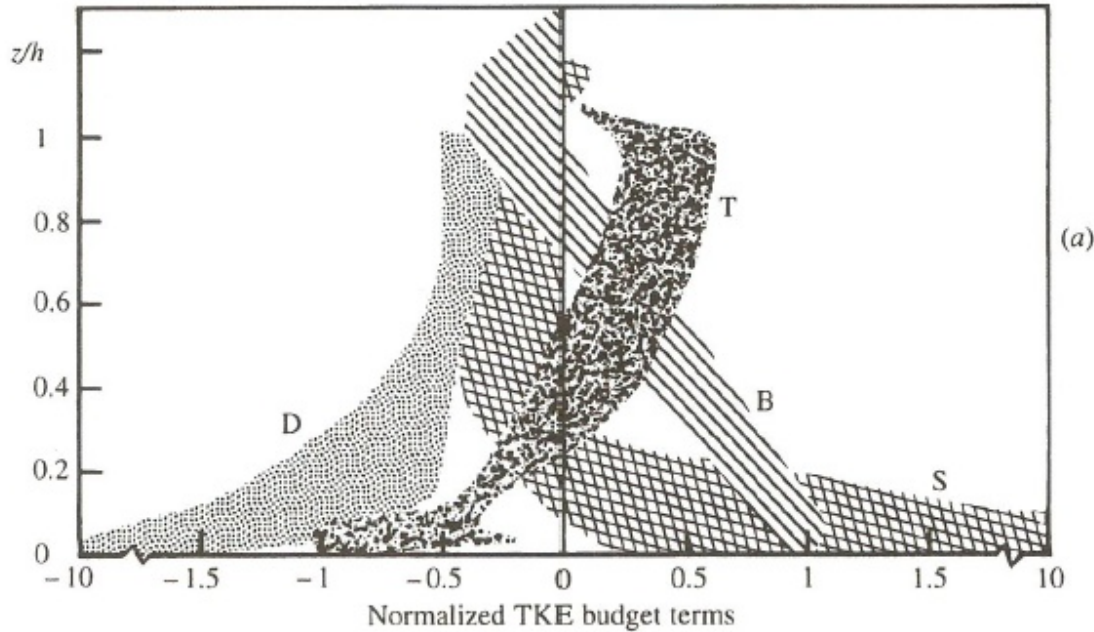
Produzione  
dovuta allo shear

Trasformazione da  
o in energia  
potenziale

Trasporto  
verticale

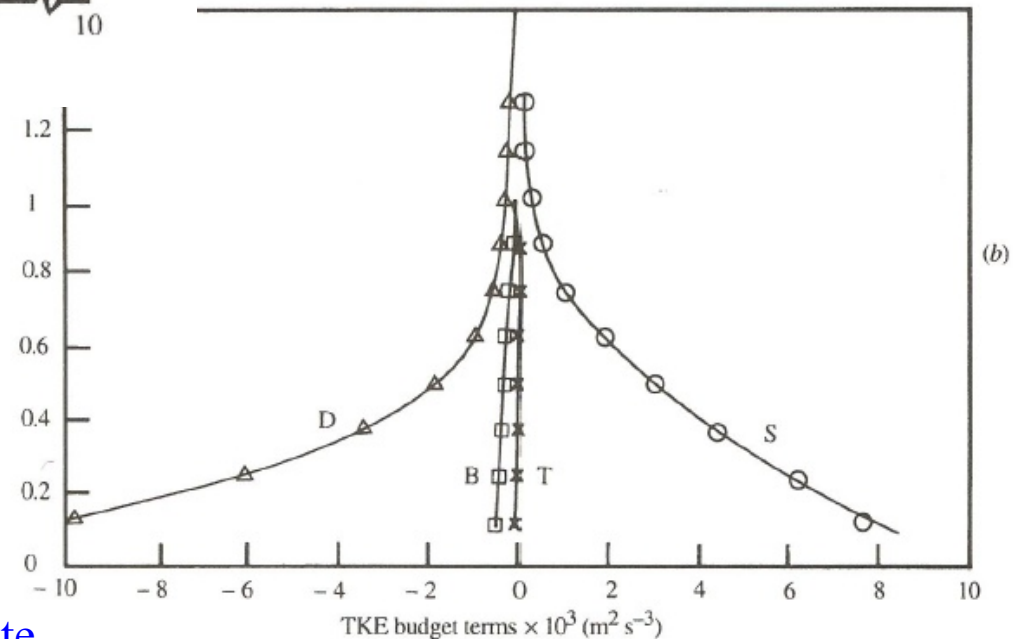
Correlazione  
pressione - velocità

## Contributi all'equazione prognostica della TKE in verticale



Durante il giorno

- S= Produzione dovuta allo shear
- B=Trasformazione da o in energia potenziale
- T=Trasporto verticale
- D=dissipazione



Durante la notte



## Parametri che descrivono la stabilità

$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} = - \overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \overline{v'w'} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + (g/\theta_v) \overline{w'\theta_v'} - \frac{\partial (\overline{w'e} + \overline{w'p'}/\rho)}{\partial z} - \epsilon$$

Produzione dovuta allo shear
Trasformazione da o in energia potenziale
Trasporto verticale
Correlazione pressione - velocità

Flux Richardson number  $\longrightarrow$   $Rf = (g/\theta_v) \overline{w'\theta_v'} / (\overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \overline{v'w'} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z})$

$$\tau_x = - \overline{\rho u'w'} = \rho K_M \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \qquad E = \overline{\rho w'q'} = - \rho K_W \frac{\partial \bar{q}}{\partial z}$$

$$Rf = (K_H/K_M) Ri \longleftarrow \text{Richardson number}$$

$$Ri = (g/\theta_v) \frac{\partial \bar{\theta}_v / \partial z}{[(\partial \bar{u} / \partial z)^2 + (\partial \bar{v} / \partial z)^2]}$$

## Bibliografia di riferimento

Oltre a quanto esposto a lezione possono essere utili da consultare i seguenti testi:

**The Atmospheric Boundary Layer**, Garratt J. R., Cambridge University Press - capitolo 2, in particolare 2.4, 2.5 e 2.6. in questi paragrafi lo studente trova l'essenziale di quanto trattato a lezione.

**An Introduction to Boundary Layer Meteorology**, Stull R. B., Kluwer Academic Publisher capitolo 4, 5 e 6. Qui lo studente trova una trattazione più estesa di quella fatta a lezione che può servire da approfondimento.