Lezione. 10 ottobre 2019

giovedì 10 ottobre 2019 11:20

OSS. Sulla dipendenza lineare

1. Sia $v \in V$; v è lin. dipendente se $c \cdot v = 0$ $\quad c \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{K}$)
con almeno 1 coeff. $\neq 0$; quindi $c \neq 0$ (c'è solo 1 coeff.)
$\Rightarrow v = 0$ vettore nullo

2. Siano $v_1, v_2 \in V$; sono lin. dipendenti se e solo se $c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0$ con almeno 1 coeff. non nullo:

$$\text{se } c_1 \neq 0 \Rightarrow v_1 = -\frac{c_2}{c_1} v_2$$
$$\text{se } c_2 \neq 0 \Rightarrow v_2 = -\frac{c_1}{c_2} v_1$$

$\Leftrightarrow$ v_1 e v_2 sono PROPORZIONALI

3. Siano $v_1, \dots, v_k \in V$; se uno dei vettori è il vettore nullo
$\Rightarrow$ sono lin. dipendenti
se ad es. $v_k = 0$

$$\underbrace{\overset{\in \mathbb{R}}{0} \cdot v_1}_{=0} + \underbrace{\overset{\in \mathbb{R}}{0} \cdot v_2}_{=0} + \dots + \underbrace{0 \cdot v_{k-1}}_{=0} + \underbrace{1 \cdot v_k}_{1 \cdot 0} = 0$$

Def. Siano $v_1, \dots, v_k \in V$ vettori; si dicono GENERATORI DI V (oppure GENERANO V) se

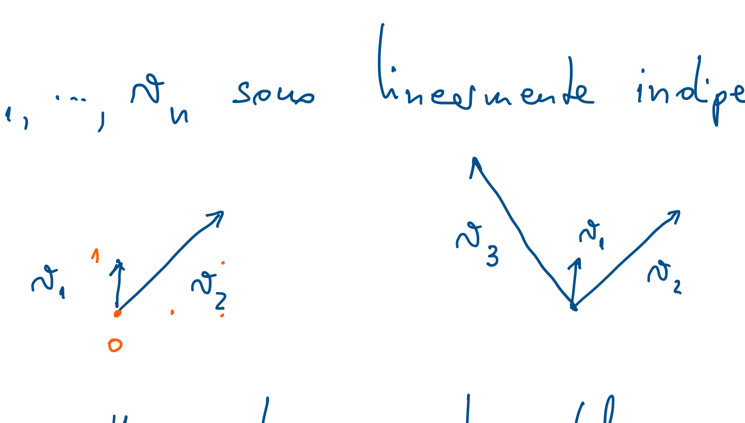
$$V = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$$

cioè ogni vettore di V si può scrivere come comb. lineare di $v_1, \dots, v_k$

Def: Un sottoinsieme $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ si dice BASE DI V se:

1. $v_1, \dots, v_n$ generano V
2. $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti

Es.:



sono 2 sottoins. di generatori del piano; però $\{v_1, v_2, v_3\}$ non sono lin. indip., quindi NON formano base.
$\{v_1, v_2\}$ invece sono una BASE

Esempi:

① $\mathbb{R}^2$, $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$
$\{v_1, v_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$

① Sono generatori:
infatti, sia $v \in \mathbb{R}^2$, $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \overset{?}{=} c_1 v_1 + c_2 v_2 = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2c_2 \\ 2c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 2c_2 \\ c_1 + 2c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_2 \\ c_1 + 2c_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_2 \\ c_1 + 2c_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2c_2 \\ b = c_1 + 2c_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 = b \\ 2c_2 = a \end{cases}$$

SIST. LINEARE nelle incognite c_1, c_2 con termini noti b e a

Matrice completa $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & b \\ 0 & 2 & a \end{array}\right)$

Soluz. del sistema: $c_2 = \frac{a}{2}$
$c_1 = b - 2c_2 = b - a$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - a \\ a/2 \end{pmatrix}$$

ok: sono generatori

Sono lin. INDIP.:

$d_1 v_1 + d_2 v_2 = 0$ vettore nullo

se mostro che per forza (necessariamente) si ha $d_1 = 0$, $d_2 = 0$

$$d_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + d_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2d_2 \\ 2d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2d_2 \\ d_1 + 2d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} d_1 + 2d_2 = 0 \\ 2d_2 = 0 \end{cases}$$

è il sistema lineare omogeneo associato al precedente

Soluz.: $d_2 = 0$, $d_1 = 0$: unica soluzione

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

② Cons. $\mathbb{R}^2$ e $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
anche $\{e_1, e_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$

- Generano: $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $v \overset{?}{=} c_1 \cdot e_1 + c_2 \cdot e_2$?

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1 = a \\ c_2 = b \end{cases}$$ unica soluzione $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- LIN. IND.: supp. $d_1 \cdot e_1 + d_2 \cdot e_2 = 0$

$$d_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} d_1 = 0 \\ d_2 = 0 \end{matrix}$$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ si dice BASE CANONICA di $\mathbb{R}^2$

③ Cons. $\mathbb{R}^n$; i suoi elementi

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

siano $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

.... $e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Esercizio: $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ formano una base di $\mathbb{R}^n$: BASE CANONICA

Per esempio: $n = 3$ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$n = 4$ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

④ Cons. $M_{m,n}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

e siano $E_{(i,j)}$ = matrice con 1 posizione ij, 0 altrove

$$E_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{(1,2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}$$

....

$$E_{(m,n)} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sono in numero di $m \cdot n$

allora $\{E_{(1,1)}, \dots, E_{(m,n)}\}$ è una base di $M_{m,n}(\mathbb{R})$

infatti:

generano:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \underbrace{a_{11} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}} + \underbrace{a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}} + \cdots + \underbrace{a_{mn} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{(i,j)}$$

es: $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- lin. indipendenti: esercizio nel caso $m = n = 2$

$\{E_{(1,1)}, \dots, E_{(m,n)}\}$ si chiama BASE CANONICA DI $M_{m,n}(\mathbb{R})$

OSS: In modo analogo $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{C}^n$, $\mathbb{Z}_2^n$, $\mathbb{Z}_3^n$, $\mathbb{Z}_5^n$, $\mathbb{Q}^n$, ...) ammette la base canonica $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.