

ESERCIZI DI GEOMETRIA 1, FOGLIO 1

Trieste, 12 ottobre 2019

1. Determinare quali tra le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva sono soddisfatte dalle seguenti relazioni. Nel caso in cui la relazione sia di equivalenza, individuare le classi di equivalenza e l'insieme quoziente.
 1. Nell'insieme delle rette del piano euclideo reale: $r \rho r_0$ se e solo se r è perpendicolare a r_0 ;
 2. Nell'insieme \mathbb{Z} dei numeri interi: $x \rho x_0$ se e solo se $|x| = |x_0|$;
 3. Nell'insieme \mathbb{Z} dei numeri interi: $x \rho x_0$ se e solo se $xx_0 > 0$;
 4. Nell'insieme \mathbb{Z} dei numeri interi: $x \rho x_0$ se e solo se $xx_0 \geq 0$;
 5. Nell'insieme \mathbb{N} dei numeri naturali: $x \rho x_0$ se e solo se x ha un numero di cifre maggiore o uguale a x_0 ;
 6. Nell'insieme \mathbb{R} dei numeri reali: $x \rho x_0$ se e solo se $x - x_0 \in \mathbb{Z}$.
2. Cosa c'è di errato nella seguente dimostrazione che se una relazione ρ gode della proprietà simmetrica e transitiva allora gode anche della proprietà riflessiva.

"Sia x qualsiasi. Se $x\rho y$ allora per la proprietà simmetrica $y\rho x$ e per la proprietà transitiva $x\rho x$."
3.
 1. In \mathbb{Z}_7 si calcoli per ogni elemento non nullo l'inverso rispetto al prodotto.
 2. In \mathbb{Z}_8 e in \mathbb{Z}_{12} si individuino gli inversi di tutti gli elementi che hanno inverso rispetto al prodotto.
4. Sia $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ il campo dei numeri razionali. Si definisca un'ulteriore operazione in \mathbb{Q} ponendo $x \star y = \frac{3}{4}(x \cdot y)$. Si dimostri che $(\mathbb{Q}, +, \star)$ è un campo.