SPAZI VETTORIALI, SOTTOSPAZI, BASI

D'ora in poi sia K un campo fissato.
K può essere $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_p$, ...

Vogliamo definire gli spazi vettoriali su K, insiemi con due operazioni: somma interna e prodotto esterno, con certe prop.

Prima alcuni esempi:

a) $K^n = K \times \dots \times K = \{x = (x_1, \dots, x_n) \text{ con } x_i \in K \ \forall i\}$
$n = 1$: ritrovo K.

Somma interna $\quad + : K^n \times K^n \longrightarrow K^n$
$$(x, y) \longrightarrow x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

Prodotto esterno con operatori in K $\quad \cdot : K \times K^n \longrightarrow K^n$
$$(\lambda, x) \longrightarrow \lambda \cdot x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

Elementi di K: scalari

Operazioni sono membro a membro.

Oss. lo stesso simbolo indica operaz. in K e in K^n.

b) Fisso due naturali m, n. $M(m \times n, K)$ è l'insieme delle matrici con m righe, n colonne con elementi (o entrate) in K. Si numerano con un doppio indice, primo di riga, secondo di colonna.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \text{ righe}$$

$\uparrow \ \uparrow$
colonne

$M(m \times n, K)$ è in biezione con K^{mn}: cambia solo notazione.

Date 2 matrici $m \times n$ A, B si def. $A+B$, somma membro a membro; se $\lambda \in K$, prodotto esterno $\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & & \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$

Notazione $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$.

c) $\mathbb{C}$ campo dei numeri complessi

$$\mathbb{R} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(\lambda, a+ib) \longrightarrow \lambda a + i\lambda b$$

d) Vettori geometrici: vettori applicati e vettori liberi.

DEFINIZIONE K campo

Un insieme V è un K-spazio vettoriale se sono date un'operazione interna di somma

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$
$$(v, w) \longrightarrow v + w$$

e un'operazione esterna con operatori in K: prodotto

$$\cdot : K \times V \longrightarrow V$$
$$(\lambda, v) \longrightarrow \lambda v$$

tali che valgono le proprietà:

V1: V è un gruppo abeliano rispetto alla somma; 0 = vettore nullo, $-v$ opposto

V2: le 2 operazioni sono legate da 4 proprietà:

1. $\forall \lambda, \mu \in K, \forall v \in V$ $\quad (\lambda+\mu) v = \lambda v + \mu v$
2. $\forall \lambda \in K, \forall v, w \in V$ $\quad \lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w$
3. $\forall \lambda, \mu \in K, \forall v \in V$ $\quad \lambda(\mu v) = (\lambda\mu) v$
4. $\forall v \in V$ $\quad 1 \cdot v = v$

Elementi di V : vettori
" " K : scalari

Esempio a) : $0 = (0,0,\dots,0)$ vettore nullo
$-x = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$

Esempio b) : simile, 0 = matrice nulla

Es. c) : $\mathbb{C}$ è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.

Proprietà degli spazi vettoriali

✓ (i) $0 \cdot v = 0 \quad \forall v \in V$

Infatti $0 \cdot v = (0+0) v = 0 \cdot v + 0 \cdot v \Rightarrow 0 \cdot v = 0$

(ii) $\lambda \cdot 0 = 0 \quad \forall \lambda \in K$
$\lambda \cdot 0 = \lambda \cdot (0+0) = \lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0 \Rightarrow \lambda \cdot 0 = 0$

(iii) Se $\lambda v = 0$, allora o $\lambda = 0$ o $v = 0$.
Sia $\lambda v = 0$; se $\lambda \neq 0$ $\exists \lambda^{-1} \in K$ t.c. $\lambda^{-1}\lambda = \lambda\lambda^{-1} = 1$.
Allora: ~~.....~~
$v = 1 \cdot v = (\lambda^{-1}\lambda) \cdot v = \lambda^{-1}(\lambda v) = \lambda^{-1}(0) = 0$.

✓ (iv) $(-1) v = -v$
$v + (-1)v = 1 \cdot v + (-1)v = (1-1)v = 0v = 0$.

Altro esempio fondamentale.
d) Polinomi in una variabile $K[t] = \{ a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n, \ a_0, \dots, a_n \in K, \ n \geq 0 \}$

Dare un polinomio equivale a dare la successione dei suoi coefficienti $a_0, \dots, a_n$.
I polinomi si sommano e si moltiplicano
$K[t] \supset K$; polinomio nullo

per scalari termine a termine.

e) Dato un insieme S, $Hom(S,K) = \{f: S \longrightarrow K\}$ tutte le applicazioni.

Se $f, g \in Hom(S,K)$, $f+g$ è l'applicazione t.c. $(f+g)(s) = f(s) + g(s) \quad \forall s \in S$.

Se $\lambda \in K$, $f \in S$, λf è l'appl. t.c. $(\lambda f)(s) = \lambda f(s) \quad \forall s \in S$.

Appl. nulla ~~Polinomio nullo~~ $0 : S \longrightarrow K$
$s \longrightarrow 0 \quad \forall s \in S$

Sottospazio vettoriale

V K-spazio vettoriale
$\cup$
W sottoinsieme di V

Def. W è un sottospazio vettoriale di V se:

1. $W \neq \emptyset$
2. se $w, w' \in W \Rightarrow w + w' \in W$
   W è chiuso rispetto alla somma.
3. Se $w \in W$, $\lambda \in K \Rightarrow \lambda w \in W$
   W è chiuso per il prodotto esterno ~~per scalari~~

Oss. $0 \in W$, infatti: $\exists v \in W$, dunque $\underset{0}{0 \cdot v} \in W$. Anche $\underset{-v}{(-1)v} \in W$

Esempi (0) $W = (0)$

1. $V = \mathbb{R}^2$

$W_1 = \{0\}$ è sottospazio

$W_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 + 3x_2 = 4\}$ non è s.sp.

$W_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 + 3x_2 = 0\}$ è s.sp.

$W_4 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ no: $\lambda(x_1, x_2)$,

$W_5 = \{ \quad - \quad - \quad \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ no $-(x_1, x_2)$

Significato geom. delle operaz. in $\mathbb{R}^2$.

2. $\mathbb{R}[t]$
$\cup$
$\mathbb{R}[t]_d = \{$ polinomi di grado $\leq d \}$

$\{$ polinomi di grado $d \}$ non è sottospazio

Le operazioni di somma e prodotto di V inducono operazioni nel sottospazio W: operazioni indotte.

<u>Oss.</u> W con le operazioni indotte è un K-spazio vettoriale.

<u>Prop.</u> Ogni <u>intersezione</u> di sottospazi vettoriali di V è <u>sottospazio</u> vettoriale.

<u>Dim.</u> Sia I un insieme di indici, sia dato $\forall i \in I$ un sottospazio W_i.
Consideriamo la loro intersezione
$$W := \bigcap_{i \in I} W_i \subset V.$$

$$0 \in W_i \quad \forall i \Rightarrow 0 \in W$$

Se $u, w \in W \Rightarrow u, w \in W_i \ \forall i$, W_i sottosp. $\Rightarrow$
$u + w \in W_i \ \forall i \Rightarrow u + w \in W$: chiuso somma

Se $u \in W, \lambda \in K \Rightarrow u \in W_i \ \forall i \Rightarrow \lambda u \in W_i \ \forall i \Rightarrow$
$\lambda u \in W$.

<u>Esempio</u> $V = K[t]$, $W_i = K[t]_i$, $i \geq 0$
$\bigcap_{i \geq 0} W_i = K$. Qui $W_0 \subset W_1 \subset \cdots$

Unione di sottospazi <u>in generale</u> non è sottospazio. Es. 2 rette in $\mathbb{R}^2$, si intersecano in (0)

Os. Se W, W' sono sottospazi vettoriali e $W \cup W'$ è anche lui sottospazio, allora o $W \subset W'$ o $W' \subset W$.

Esercizio

Oss. Se W è sottospazio vettoriale di V, $w_1, w_2 \in W$ e $\lambda, \mu \in K$, allora $\lambda w_1 + \mu w_2 \in W$.

Dim. $\lambda w_1 \in W$, $\mu w_2 \in W \Rightarrow \lambda w_1 + \mu w_2 \in W$.

Ma anche viceversa se $W \neq \emptyset$ verif. la prop. che $\forall \lambda, \mu \in K$, $w_1, w_2 \in W$ ~~se~~ $\lambda w_1 + \mu w_2 \in W$, allora W è sottospazio.

Infatti: basta prendere $\lambda = \mu = 1$: $w_1 + w_2 \in W$, se si prende $\mu = 0$ opp. $\lambda = 0$ si ha la chiusura risp. al prodotto esterno.

Ogni spazio vettoriale V ha
$\{0\}$ sottospazio banale
V sottospazio improprio.

Se è dato un sottoinsieme $S \subset V$, non sottospazio, si può considerare il più piccolo sottospazio che lo contiene.
Ci serve la nozione di combinazione lineare.

Def. Dati vettori $v_1, \dots, v_n \in V$, una loro combinazione lineare è un vettore della forma $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$, con $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, detti coefficienti della combinazione lineare.

Per es. $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \Rightarrow$ vettore nullo, comb. lin. banale

$\lambda_i = 1$ e gli altri 0 $\Rightarrow v_i$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ " " $\Rightarrow v_1 + v_2$

ecc.

Se $n = 1$, $\{\lambda v \mid \lambda \in K\}$ sono i multipli di V.

$\Rrightarrow$ L'insieme di tutte le combinazioni lineari di $v_1, \dots, v_n$, $n \geq 1$ si denota $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$: è un sottospazio di V che contiene $v_1, \dots, v_n$, detto <u>sottospazio generato</u> (o chiusura lineare) da $v_1, \dots, v_n$.

<u>Dim.</u>

$(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) + (\mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n) = (\lambda_1 + \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda_n + \mu_n) v_n$

chiuso risp. alla somma

$\lambda(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = (\lambda \lambda_1) v_1 + \dots + (\lambda \lambda_n) v_n$

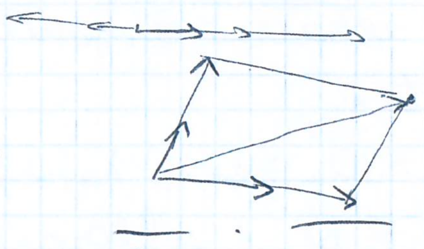
chiuso risp. al prod. esterno.

<u>Prop.</u> $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ è il più piccolo sottospazio che contiene $v_1, \dots, v_n$.

<u>Dim.</u> Se $W \ni v_1, \dots, v_n$, allora contiene tutte le loro combinazioni lineari, ossia $\langle v_1, \dots, v_n \rangle \subseteq W$.

Es. $\mathbb{R}^2$: $\langle v \rangle$: tutti i vettori proporzionali a v.

$\langle v, w \rangle$ è tutto $\mathbb{R}^2$



Se $S \subseteq V$ è infinito, il sottosp. generato da S è l'insieme di tutte le comb. lin. <u>finite</u> di elem. di S.

Esempio

In K^n def. $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$

$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$

$\vdots$

$e_n = (0, 0, \dots, 1)$

$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

$\langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle = K^n$.

2) In $K[t]$

$\langle \{t^i\}_{i \geq 0} \rangle = K[t]$

Def. Siano $v_1, \dots, v_n \in V$.

$v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti se ogni loro combinazione lineare nulla è banale, ossia:

se $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ necessariamente si ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$; i coefficienti sono tutti nulli.

Altrimenti sono linearmente dipendenti: esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ non tutti nulli tali che $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$.

Prop. Siano $v_1, \dots, v_n \in V$ ~~e~~ sono linearmente dipendenti se e solo se almeno uno è combinaz. lineare dei rimanenti.

Dim. Sia $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ con $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tutti nulli $\Rightarrow \exists\, \lambda_i \neq 0$, allora λ_i è invertibile.

$\lambda_i v_i = -\lambda_1 v_1 - \dots - \lambda_{i-1} v_{i-1} - \lambda_{i+1} v_{i+1} - \dots - \lambda_n v_n$

$\lambda_i^{-1}(\lambda_i v_i) = v_i = -\lambda_1 \lambda_i^{-1} v_1 - \dots - \lambda_n \lambda_i^{-1} v_n$.

Viceversa se $v_1 = \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$

$1 \cdot v_1 - \alpha_2 v_2 - \dots - \alpha_n v_n = 0$ è una comb. lin. nulla non banale.

Es. 1) un vettore è lin. dip. se $\exists \lambda \neq 0$ t.c. $\lambda v = 0 \Rightarrow v = 0$.

2) due vettori lin. dip.: $\lambda v_1 + \mu v_2 = 0$ $\left\langle \begin{array}{l} \lambda \neq 0 \\ \mu = 0 \end{array} \right.$

$v_1 = -\frac{\mu}{\lambda} v_2$ opp. $v_2 = -\frac{\lambda}{\mu} v_1$:

uno è multiplo dell'altro, ossia sono proporzionali. Es.: $\{v, -v\}$, $\{v, 2v\}$, ...

v_1, v_2 sono lin. indip. se non sono proporzionali.

3) Consid. $v_1, v_2, \dots, v_n$ con $v_i = 0 \Rightarrow$ sono lin. dip.

3') se $v_1, \dots, v_n$ sono lin. dip. e aggiungo altri vettori $\Rightarrow$ sono lin. dip.

4) In $\mathbb{R}^3$: $(1,2,3)$, $(1,-1,0)$, $(0,1,4)$

Sono lin. indipendenti o dipendenti?

$x_1(1,2,3) + x_2(1,-1,0) + x_3(0,1,4) = (0,0,0)$

$(x_1 + x_2, 2x_1 - x_2 + x_3, 3x_1 + 4x_3) = (0,0,0)$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_3 = 0 \end{cases}$ sistema lineare omogeneo

$x_2 = -x_1$

$x_3 = -\frac{3}{4} x_1$

$2x_1 + x_1 - \frac{3}{4} x_1 = 0$

$\frac{9}{4} x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$: lin. indip.

Per capire se sono lin. dip. o in dip.
6 vettori in $\mathbb{R}^{13}$: mi dà un sistema lineare in 6 incognite e 13 equazioni.

Prop. Se $v_1, \dots, v_n$ sono lin. indip., ogni vettore $v \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ si esprime in maniera <u>unica</u> come comb. lin. di $v_1, \dots, v_n$.

Dim.
Se $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n \Rightarrow$

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n - \mu_1 v_1 - \dots - \mu_n v_n = 0$$

$$(\lambda_1 - \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n) v_n = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 - \mu_1 = 0, \dots, \lambda_n - \mu_n = 0.$$

<u>Viceversa</u> se ogni vettore di $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ ha un'unica espressione come comb. lin. di $v_1, \dots, v_n$, questi sono lin. indip.
Dim.: prendiamo una comb. lineare nulla di $v_1, \dots, v_n$
Se $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 = 0 v_1 + \dots + 0 v_n$:
lo 0 è scritto in 2 modi $\Rightarrow \lambda_1 = 0, \dots, \lambda_n = 0$.

Def. Una famiglia qualunque $\{v_i\}_{i \in I}$ di vettori è linearmente <u>indipendente</u> se ogni sottofamiglia finita lo è.
Es. le potenze di t in $K[t]$
ciò significa: non esiste una comb. lin. nulla non banale di alcun insieme finito di vettori tra i v_i, $i \in I$.

BASI

- **Def.** <u>sistema di generatori</u>
una famiglia di elementi di V $\{v_i\}_{i\in I}$ è un sistema di generatori di V se
$V = \langle \{v_i\} \rangle_{i\in I}$, cioè ogni elemento v di V è combinazione lineare di un numero finito di elementi v_i.

Def. <u>base</u>
Una famiglia $\{v_i\}_{i\in I}$ di elementi di V è <u>una base di V</u> se è un sistema di generatori linearmente indipendenti.

V è detto <u>finitamente generato</u> se ha un sistema finito di generatori $v_1, \dots, v_n$.

Teorema
Se $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ è una base di V, ogni $v \in V$ è comb. lin. di $v_1, \dots, v_n$ in maniera unica. I coeff. dell'unica comb. lineare sono le coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{B}$.

<u>Esempi</u> 0) Sist. di rif. cartesiano.

1) K^n $(e_1, \dots, e_n) =: \mathcal{C}$ base <u>canonica</u>
sono linearmente indipendenti perché
$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
Termine equivalente: base standard.
Esiste solo in K^n.

2) $M(m \times n, K)$
base

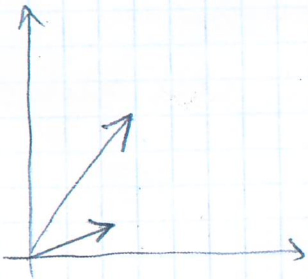
$$E_i^j = \begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 \cdots 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \leftarrow i$$

Sono le matrici con un unico elemento non nullo, uguale a 1.

3) $(1, i)$ base di $\mathbb{C}$ su $\mathbb{R}$

4) $(1, t, t^2, \dots, t^n, \dots)$ base infinita di $K[t]$.

5) In $\mathbb{R}^2$



$v_1 = (2,1)$

$v_2 = (3,4)$

sono lin. indip.

Formano una base di $\mathbb{R}^2$?

Devo vedere se formano un sistema di generatori.

$$(x_1, x_2) = \lambda(2,1) + \mu(3,4)$$

$$\begin{cases} x_1 = 2\lambda + 3\mu \\ x_2 = \lambda + 4\mu \end{cases}$$

$$\lambda = x_2 - 4\mu$$

$$x_1 = 2x_2 - 8\mu + 3\mu = 2x_2 - 5\mu$$

$$5\mu = -x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} \mu = -\frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2 \\ \lambda = x_2 + \frac{4}{5}x_1 - \frac{8}{5}x_2 \end{cases}$$

il sistema ha 1 soluzione

Se $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ è una base di V, ogni vettore ha un'<u>unica</u> espressione

$$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

<u>Def.</u> $x_1, \dots, x_n$ sono dette le coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{B}$.

<u>Es.</u> in K^n $x_1, \dots, x_n$ sono le coord. di $(x_1, \dots, x_n)$ rispetto alla base canonica.