Lezione 14 ottobre

lunedì 14 ottobre 2019 11:16

Abbiamo visto: Span $(v_1, .., v_k)$

Vediamo ora un'applicazione dello Span:

TEOREMA: Esistenza di soluzioni per sistemi lineari

Sia $A \cdot X = b$; il sistema lineare ha soluzioni (è compatibile)

$$\Leftrightarrow \underbrace{b}_{\text{vettore colonna di termini noti}} \in \text{Span}\left(\underbrace{A^{(1)}, A^{(2)}, .., A^{(n)}}_{\text{colonne di A}}\right)$$

Esempio:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2 \end{cases}$$

ha almeno una soluzione $\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a_{11} s_1 + a_{12} s_2 = b_1 \\ a_{21} s_1 + a_{22} s_2 = b_2 \end{cases}$$

riscrivo le due equazioni in questo modo

$$\boxed{\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \cdot s_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \cdot s_2} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} s_1 + a_{12} s_2 \\ a_{21} s_1 + a_{22} s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$s_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

Quindi: riscrivendo le eq. in termini delle colonne di A troviamo l'enunciato

Dim. in generale:

$A \cdot X = b$ ha soluzione $\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$

$$\iff \quad A\cdot\begin{pmatrix}s_1\\s_2\\\vdots\\s_n\end{pmatrix}=b$$

osservo che

$$\underbrace{\underset{m\times n}{A}\cdot\underset{n\times 1}{\begin{pmatrix}s_1\\s_2\\\vdots\\s_n\end{pmatrix}}}_{m\times 1}=\begin{pmatrix}a_{11}s_1+a_{12}s_2+\dots+a_{1n}s_n\\a_{21}s_1+a_{22}s_2+\dots+a_{2n}s_n\\\vdots\\a_{m1}s_1+a_{m2}s_2+\dots+a_{mn}s_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}\cdot s_1+\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix}\cdot s_2+\dots+\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}\cdot s_n$$

$$=A^{(1)}s_1+A^{(2)}\cdot s_2+\dots+A^{(n)}\cdot s_n$$

Quindi: $A\cdot\begin{pmatrix}s_1\\\vdots\\s_n\end{pmatrix}=b \iff A^{(1)}\cdot s_1+\dots+A^{(n)}\cdot s_n=b$

$\iff$ b è comb. lineare delle colonne di A

$\iff$ $b\in \mathrm{Span}(A^{(1)},A^{(2)},\dots,A^{(n)})$

Rivediamo BASI:

Def: $\{v_1,\dots,v_n\}$ vettori di V sono BASE se

① generano V : $V=\mathrm{Span}(v_1,\dots,v_n)$

② $v_1,\dots,v_n$ sono linearm. indipendenti

Teorema: Un insieme $\{v_1,\dots,v_n\}$ di vettori di V è base $\iff$ ogni vettore $v\in V$ si scrive in MODO UNICO come comb. lineare di $v_1,\dots,v_n$.

Dim. $\Rightarrow$: cons. $v\in V$

posso scrivere $v=c_1v_1+\dots+c_nv_n$ perché $\{v_1,\dots,v_n\}$ base, quindi genera V

tale espressione
è unica : infatti, se fosse $v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$

$$\Leftrightarrow \circledast \; (c_1 - a_1) v_1 + (c_2 - a_2)\cdot v_2 + \dots + (c_n - a_n)\cdot v_n = 0 \in V$$

ma $\{v_1, .., v_n\}$ base $\Rightarrow$ sono linearm. indipendenti $\Rightarrow$ tutti i coeff. della $\circledast$ sono NULLI

cioè: $c_1 - a_1 = 0$ $\qquad$ $c_1 = a_1$

$c_2 - a_2 = 0$ $\qquad$ $c_2 = a_2$

$\vdots$ $\qquad$ $\vdots$

$c_n - a_n = 0$ $\qquad$ $c_n = a_n$

$\Rightarrow$ le due espressioni sono uguali

Viceversa: $\Leftarrow$ Supp. ogni v si scrive in modo unico come comb. di $v_1, .., v_n$

$\Rightarrow$ in particolare $\mathrm{Span}(v_1, .., v_n) = V$

Inoltre : cons. $0 \in V$; posso scrivere sempre

$$0 = \underset{\in \mathbb{R}}{0}\cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n$$

Siccome la rapp. di OGNI VETTORE è unica per ipotesi, anche $0 \in V$ ammette questa unica rappresentazione $\Rightarrow$ non può esistere

$c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0$ con c_i non tutti nulli perchè sarebbe una seconda rappresentazione del vettore nullo

$\Rightarrow$ $v_1, .., v_n$ sono anche lin. indipendenti

$\Rightarrow$ sono base

Def.: Sia $\mathcal{B} = \{v_1, .., v_n\}$ una base di V

Per ogni vettore $v \in V$ possiamo definire le COORDINATE DI v rispetto a $\mathcal{B}$: sono i coefficienti

$c_1, \dots, c_n$ per cui si ha

$$v = \boxed{c_1} v_1 + \dots + \boxed{c_n} v_n$$

Esempio : di NON UNICITA' di espressione:

in $\mathbb{R}^2$: base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

cons. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è un insieme di generatori per $\mathbb{R}^2$;

NON FORMANO UNA BASE perché sono lin. dipendenti

infatti: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sia $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

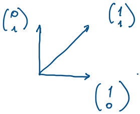
$$= \begin{pmatrix} 1 + 0 + 1 \\ 0 + 2 + 1 \end{pmatrix}$$

ma anche: $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

anche $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

anche $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

anche $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$


$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Abbiamo trovato ben 5 rappresentazioni diverse di $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ come combinazione lineare di v_1, v_2, v_3

TEOREMA DI ESTRAZIONE DI UNA BASE:

Siano $\{v_1, .., v_k\}$ generatori per V; allora si può sempre estrarre da $\{v_1, .., v_k\}$ una base di V

(cioè si può trovare una base di V cancellando alcuni dei vettori $v_1, .., v_k$).

Prima della dim. vediamo:

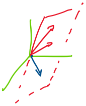
LEMMA 1

Cons. $u_1, .., u_\ell \in V$

sia $u \in \text{Span}(u_1, .., u_\ell)$

Allora

$$\text{Span}(u_1, .., u_\ell) = \text{Span}(u_1, .., u_\ell, u)$$



LEMMA 2

Siano

$u_1, .., u_h \in V$

vettori linearmente indipendenti

e sia

$u \notin \text{Span}(u_1, .., u_h)$

Allora anche i vettori

$u_1, ..., u_h, u$

sono linearmente indipendenti.

Dim. Teo. di Estrazione

$\{v_1, ..., v_k\} \supseteq \mathcal{B}$ base da costruire

Costruiamo un algoritmo:

supp. $v_1 \neq 0$ (se $v_1 = 0$ lo togliamo e cons. il primo vettore non nullo)

$v_1 \in \mathcal{B}$ lo scelgo

Cons. v_2 abbiamo 2 casi:

- $v_2 \in \mathrm{Span}(v_1)$ NON LO SCELGO
  L1 : $\mathrm{Span}(v_1) = \mathrm{Span}(v_1, v_2)$
- $v_2 \notin \mathrm{Span}(v_1)$ LO SCELGO
  L2 : $\{v_1, v_2\}$ sono lin. indipendenti $\quad v_2 \in \mathcal{B}$

Cons. v_3 abbiamo 2 casi

- $v_3 \in \mathrm{Span}(v_1, v_2)$ NON LO SCELGO
  L1: $\mathrm{Span}(v_1, v_2) = \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3)$
- $v_3 \notin \mathrm{Span}(v_1, v_2)$ LO SCELGO
  $v_3 \in \mathcal{B}$
  L2: Se v_1, v_2 lin. ind. $\Rightarrow v_1, v_2, v_3$ lin. indip.
  se invece $v_2 \in \mathrm{Span}(v_1) \Rightarrow v_1, v_3$ lin. indip.

A questo punto:

$\mathcal{B} \supseteq$

- $\{v_1\}$ se $\mathrm{Span}(v_1) = \mathrm{Span}(v_1, v_2) = \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3)$
- $\{v_1, v_2\}$ se $\mathrm{Span}(v_1) \subsetneq \mathrm{Span}(v_1, v_2) = \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3)$
- $\{v_1, v_3\}$ se $\mathrm{Span}(v_1) = \mathrm{Span}(v_1, v_2) \subsetneq \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3)$
- $\{v_1, v_2, v_3\}$ se $\mathrm{Span}(v_1) \subsetneq \mathrm{Span}(v_1, v_2) \subsetneq \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3)$

$\vdots$

In generale: v_i

- $v_i \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_{i-1})$ NON LO SCELGO
- $v_i \notin \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_{i-1})$ LO SCELGO

Arrivo a v_k. Per costruzione, tutti i vettori scelti sono linearmente indipendenti

e siccome $V = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$

e i vettori tolti sono comb. lineari di quelli scelti $\Rightarrow$ i vettori scelti generano ancora tutto V

Schemino:

$$\mathrm{Span}(v_1) \subseteq \mathrm{Span}(v_1, v_2) \subseteq \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3) \subseteq$$

$$\subseteq \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3, v_4) \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{Span}(v_1, v_2, \ldots, v_k) = V$$

scelgo un vettore ogni volta che c'è $\underset{\neq}{\subset}$.

Esempio: $V = \mathbb{R}^2$, $k = 4$

$$\{v_1, \ldots, v_k\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Voglio estrarre base con l'algoritmo:

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ok LO PRENDO

$v_1 \in \mathcal{B}$

cons. $v_2 \in \mathrm{Span}(v_1) = \{ c \cdot v_1 : c \in \mathbb{R} \}$

$v_2 = 2 \cdot v_1$ NON LO SCELGO

$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{\cdot}{\cancel{\in}} \mathrm{Span}(v_1, v_2) \underset{L1}{=} \mathrm{Span}(v_1)$

infatti $v_3 \neq c \cdot v_1$: p.ess. se fosse

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix}$: $\begin{matrix} c = 0 \\ c = 1 \end{matrix}$ imposs.

LO PRENDO

$\mathcal{B} = \{ v_1, v_3, \ldots \}$

$v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \underset{\text{sì}}{\overset{?}{\in}} \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3) \underset{L1}{=} \underline{\mathrm{Span}(v_1, v_3)}$

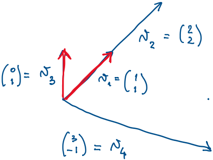
NON LO SCELGO

$= \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

infatti: $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_1\\ c_1+c_2\end{pmatrix} \qquad \begin{cases}3 = c_1\\ -1 = c_1+c_2\end{cases}, \quad c_2 = -4$$

ok.


$v_2 = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = v_3$
$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = v_4$

COROLLARIO: Ogni spazio con un numero finito di generatori ammette una base.