Lemma dello scambio (Grassmann, Steinitz)

Sia V un K-spazio vettoriale di dimensione finita n.

Sia $(v_1, \dots, v_n) = B$ una base di V.

Sia $w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$, con $\lambda_k \neq 0$ per un certo k, $1 \leq k \leq n$. Allora anche

$$v_1, \dots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \dots, v_n \text{ è una base di } V.$$

sostituisco v_k con w

Dim.

Riordinando, possiamo supporre che $k = 1$, allora $\lambda_1 \neq 0$.

Devo dimostrare due cose:

1) $w, v_2, \dots, v_k$ generano V

2) sono linearmente indipendenti.

1) Sia $v \in V$: poiché B è una base, si ha $v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$.

Vogliamo rimpiazzare v_1 con w.

Ma $w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \Rightarrow v_1 = \lambda_1^{-1} w - \lambda_1^{-1} \lambda_2 v_2 - \dots =$

$$= \frac{1}{\lambda_1} w - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} v_n$$

Allora $v = \mu_1 \left(\frac{1}{\lambda_1} w - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} v_n \right) + \mu_2 v_2 + \dots =$

$$= \frac{\mu_1}{\lambda_1} w - \frac{\mu_1 \lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \dots - \frac{\lambda_n \mu_1}{\lambda_1} v_n + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_n v_n$$

$$= \frac{\mu_1}{\lambda_1} w + \left(\mu_2 - \frac{\mu_1 \lambda_2}{\lambda_1} \right) v_2 + \dots + \left(\mu_n - \frac{\lambda_n \mu_1}{\lambda_1} \right) v_n.$$

2) Considero una comb. lin. nulla di $w, v_2, \dots, v_n$:

$\mu_1 w + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_n v_n = 0$; sostituisco w:

$\mu_1 (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_n v_n = 0$

$\mu_1\lambda_1 v_1 + (\mu_2+\mu_1\lambda_2)v_2 + \dots = 0$

Ma $v_1, \dots, v_n$ sono lin. indip., dunque i coeff. sono tutti nulli:

$$\begin{cases} \mu_1\lambda_1 = 0 & \Rightarrow \mu_1 = 0 \text{ perché } \lambda_1 \neq 0 \\ \mu_2+\mu_1\lambda_2 = 0 & \Downarrow \ \mu_2 = 0 \\ \vdots & \vdots \\ \mu_n+\mu_1\lambda_n = 0 & \mu_n = 0. \end{cases}$$

<u>Teorema</u> Prolungamento o completamento di una base.

Sia $(v_1, \dots, v_n) = \mathcal{B}$ una base di V, siano $w_1, \dots, w_r$ vettori linearmente indipendenti.

Allora

1) $r \leq n$;

2) esistono $n-r$ elementi di $\mathcal{B}$ $v_{i_1}, \dots, v_{i_{n-r}}$ tali che $w_1, \dots, w_r, v_{i_1}, \dots, v_{i_{n-r}}$ sia una base di V.

<u>Dim.</u> Per induzione su r.

$\boxed{r=0}$ vero banalmente

Supp. vero per (1, 2) $r-1$ vettori lin. indip. e dim. che vale per r:

Abbiamo $w_1, \dots, w_r$ lin. indip., allora lo sono anche $w_1, \dots, w_{r-1}$ (sottofam. di famiglia lin. indip.). Per ip. induttiva $r-1 \leq n$ e posso trovare in $\mathcal{B}$ $n-r+1$ elem. in modo che $(w_1, \dots, w_{r-1}, v_r, \dots, v_n)$ sia una base di V

(ho rinumerato). Si ha

$r \leq n+1$; ① se fosse r = n+1, allora $r-1=n$, $n-r+1=0$, quindi già $w_1,\dots,w_{r-1}$ sarebbe una base di V, e perciò $w_r \in \langle w_1,\dots,w_{r-1}\rangle$

<u>assurdo</u> perché per ip. $w_1,\dots,w_r$ sono lin. indip.

② quindi $r \leq n$. Inoltre $n-r+1 \geq 1$.

$w_1,\dots,w_{r-1},v_r,\dots,v_n$ è una base di V;

oss. che $w_r \neq 0$ (altrimenti $w_1,\dots,w_r$ lin. dip.)

e $w_r = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_{r-1} w_{r-1} + \underbrace{\lambda_r v_r + \dots + \lambda_n v_n}_{n-r+1 \geq 1}$

$\lambda_r,\dots,\lambda_n$ non sono tutti nulli, come sopra;

supp. che sia $\lambda_r \neq 0$, per il lemma dello scambio posso sostituire a v_r w_r,

e allora $(w_1,\dots,w_r,v_{r+1},\dots,v_n)$ è base di V.

<u>Conseguenze</u>.

1) Se V ha una base finita, ogni base è finita

Dim. $\mathcal{B}=(v_1,\dots,v_n)$ base finita, $\{w_i\}_{i\in I}$ altra base: se I è infinito, prendo $n+1$ vettori $w_{i_1},\dots,w_{i_{n+1}}$ sono lin. indip., ma ~~posso completare a una~~ per il Teor. preced. $n+1 \leq n$:

<u>assurdo</u>

2) Se ho 2 basi finite di V, hanno lo stesso numero di elementi.

<u>Dim.</u> $v_1,\dots,v_n$ base
$w_1,\dots,w_m$ vettori lin. indip. basi $\}$ $m \leq$

poi inverto i ruoli $\Rightarrow n \leq m$.

Def: V K-sp. vettoriale

dimensione di V $\quad \dim V$ o $\dim_K V$

è $\begin{cases} \infty & \text{se } V \text{ non ha basi finite} \\ n & \text{se } V \text{ ha una base di } n \text{ elementi.} \end{cases}$

Es: $\dim K^n = n$, $e_1, \dots, e_n$ base canonica

$\dim M(n \times m, K) = mn$

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

Lo spazio vettoriale nullo ha dimensione 0

$\dim_K K[t] = \infty$

ESTRARRE UNA BASE DA UN SISTEMA FINITO DI GENERATORI

Esercizio $v_1, \dots, v_n$ sistema di generatori di V

$\Rightarrow v_1, \dots, v_n$ contiene una base di V

Induz. su n.

(se sono lin. indip. è già una base, altrim. uno dipende dagli altri, e tolgo - - - .)

Corollario. Se V è finitamente generato, ha dimensione finita.

Prop V sp. vett. di dimensione finita n (esiste una base di n elem.)

(i) se $v_1, \dots, v_n$ sono lin. indip. formano una base

(ii) se $v_1 \dots v_n$ generano V, sono una base.

Dim:

(i) $v_1 \dots v_n$ si può prolungare a una base di n elem. - - -

(ii) da $\{v_1, \dots, v_n\}$ posso estrarre una base, nec. di n elementi $\Rightarrow v_1, \dots, v_n$ è base.

Confrontiamo ora la dim di V con quella di un suo sottospazio W:
Se dim $V = n$ finita, anche W ha dim finita e dim $W \leq$ dim V. Se dim W = dim V, allora $W = V$.

Dim:
Se W non fosse fin. generato, avrei una fam. infinita lin. indip. di elem. di W, dunque di V: assurdo. Dunque dim W è finita.
Se ho una base di W, sono elem. lin. indip. in V, perciò dim $W \leq$ dim V.
Se dim W = dim $V = n$ e $w_1, \dots, w_n$ è base di W, sono tutti lin. indip. $\Rightarrow$ è base anche di V e perciò $W = V$.

Oss: se $W = \{0\}$, dim $W = 0$.

Si dim. usando l'assioma della scelta (o lemma di Zorn) che ogni spazio vettoriale ha una base. (SENZA DIM.)

SOMMA DI SOTTOSPAZI

$U, W \subseteq V$ sottospazi

Def. $U + W = \{ u + w \mid u \in U, w \in W \}$.
sottospazio somma

i) $U+W$ è un sottospazio
ii) è il sottospazio generato da $U \cup W$:
$U + W \supseteq U, W$ e se $V' \supseteq U \cup W$, chiaram. V' ~~contr~~ è chiuso rispetto alla somma, dunque contiene $U + W$.

Teorema relazione di Grassmann.
V spazio vettoriale di dim finita.

$W, W' \subseteq V$ sottospazi
Allora vale la relazione:

$$\dim W + \dim W' = \dim(W+W') + \dim(W \cap W').$$

Dim Fisso una base di $W \cap W'$:
$v_1, \dots, v_r$, $r = \dim(W \cap W')$.

Prolungo a una base di W e a una base di W':
$v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_k$ base di W
$v_1, \dots, v_r, w_1', \dots, w_h'$ base di W'

Allora basta dim. che
$v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_k, w_1', \dots, w_h'$ formano una base di $W + W'$.

a) generano $W + W'$.
Se $w + w'$ è un elemento di $W + W'$, allora w si può scrivere $w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r + \lambda_{r+1} w_1 + \dots + \lambda_{r+k} w_k$

e $w' = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_r v_r + \mu_{r+1} w_1' + \dots + \mu_{r+h} w_h'$;

dunque $w + w' = (\lambda_1 + \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda_r + \mu_r) v_r + \lambda_{r+1} w_1 + \dots + \mu_{r+1} w_1' + \dots$

b) sono lin. indip.
Se $\underbrace{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_k w_k}_{v \in W} + \underbrace{\gamma_1 w_1' + \dots + \gamma_h w_h'}_{\in W'} = 0$

ma $v = -\gamma_1 w_1' + \dots + \gamma_h w_h' \in W'$ $\Rightarrow$

$v \in W \cap W'$, dunque v si può scrivere come
$v = \delta_1 v_1 + \dots + \delta_r v_r$.

Dunque

$v = \delta_1 v_1 + \dots + \delta_r v_r = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_k w_k$

ho 2 espres. di v come comb. lin. dei vettori lin. indip. $v_1 \dots v_r w_1 \dots w_k \Rightarrow$

$\delta_1 = \alpha_1, \dots, \delta_r = \alpha_r, \beta_1 = \dots = \beta_k = 0$.

Ora si ottiene:

$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r + \gamma_1 w_1' + \dots + \gamma_h w_h' = 0$

ma $v_1 \dots v_r w_1' \dots w_h'$ sono lin. indip.

$\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_r = \gamma_1 = \dots = \gamma_h = 0$.

Esempi. Casi possibili per:

- 2 piani in $\mathbb{R}^3$
- " " $\mathbb{R}^4$

Def. Somma diretta.

La somma $W + W'$ è diretta se $W \cap W' = (0)$, in tal caso

$\dim W + W' = \dim W + \dim W'$.

Si scrive $W \oplus W'$.

V è somma diretta di 2 suoi sottospazi W, W' se $V = W + W'$ e $W \cap W' = (0)$.

Allora ogni vettore v di V si scrive in maniera unica come $v = w + w'$, con $w \in W$ e $w' \in W'$.

In particolare: $w + w' = 0 \Rightarrow w = 0$ e $w' = 0$.

Infatti se $v = w + w' = u + u'$ con $w, u \in W$
$w', u' \in W'$

allora $\underbrace{w - u}_{\in W} = \underbrace{u' - w'}_{\in W'} \Rightarrow \in W \cap W'$

e perciò è nullo e si ha $w - u = 0$
$u' - w' = 0$. ▪

Viceversa, supp. che ogni vettore di V abbia $1!$ espressione come somma $w + w'$.
Allora $V = W + W'$.
Inoltre $W \cap W' = (0)$; infatti se ci fosse un vettore $u \neq 0$ t.c. $u \in W \cap W'$, allora $u = u + 0 = 0 + u$ ha 2 espressioni.
Oppure $0 = 0 + 0 = u - u$. ▪
Dunque $V = W \oplus W'$.

Oss. Se $V = W \oplus W'$, unendo basi di W e W' si ottiene una base di V.

Posso parlare di somma di una famiglia di sottospazi $\{W_i\}_{i \in I}$ con $I = \{1, \dots, k\}$

$\sum W_i = \langle \bigcup_{i \in I} W_i \rangle$: sono le somme ~~finite~~ di elem. presi nei vari W_i.

Def. Si ~~dice~~ def. $V = \oplus W_i$ somma diretta se

1) $V = \sum_{i \in I} W_i$, e

2) ogni vettore di V ha $1!$ espressione come somma di elem. $w_1 \in W_1, \dots, w_k \in W_k$

La 2) equivale a $W_i \cap \left(\sum_{\substack{j \neq i \\ j \in I}} W_j \right) = (0)$, $\forall\, i \in I$.

Per induzione su k.

Esempio Se $v_1, \dots, v_n$ è una base di V,

allora $V = \langle v_1 \rangle \oplus \langle v_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_n \rangle$.

Esempi $W \oplus W' = \mathbb{R}^3$

MATRICI

A $m \times n$ $\qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Righe di A: $(a_{11} \dots a_{1n}) = a_1$

$\vdots$ sono matrici $1 \times n$, elementi di K^n

$(a_{m1} \dots a_{mn}) = a_m$

Colonne di A $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = a^1, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = a^n$

sono matrici $m \times 1$: elementi di K^m

A è quadrata se $m = n$.

Def: spazio delle righe di A è il sottospazio di K^n generato dalle righe di A $\langle a_1, \dots, a_m \rangle$. La sua dimensione è detta rango per righe, ed è $\leq m$.

Spazio delle colonne di A è il sottospazio di K^m generato dalle colonne di A: $\langle a^1, \dots, a^n \rangle$. La sua dim è detta rango per colonne, ed è $\leq n$.