

ESERCIZI DI GEOMETRIA 1, FOGLIO 2

Trieste, 23 ottobre 2019

- Sia V un K -spazio vettoriale. Siano u, v, w vettori linearmente indipendenti di V . Verificare che anche $u + v, v - w, u + 5w$ sono linearmente indipendenti.
 - Per quali $t \in \mathbb{R}$ i seguenti tre vettori di \mathbb{R}^3 sono linearmente indipendenti: $(1, 3, 4), (3, t, 11), (-1, -4, 0)$?
 - Dimostrare che due vettori $(a, b), (c, d)$ di K^2 sono linearmente indipendenti se e solo se $ad - bc \neq 0$.
 - Nel \mathbb{Q} -spazio vettoriale \mathbb{R} , dimostrare che i vettori (numeri reali) $1, \sqrt{2}$ sono linearmente indipendenti. Stessa domanda per $\sqrt{2}, \sqrt{3}$.
- Siano X un insieme, V un K -spazio vettoriale e $Hom(X, V)$ l'insieme delle applicazioni $f : X \rightarrow V$. Verificare che anche $Hom(X, V)$ è un K -spazio vettoriale con le operazioni di somma e prodotto definite punto per punto:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x); (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Considerando poi il caso di $Hom(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, dimostrare che ognuna delle seguenti famiglie di funzioni è linearmente indipendente in $Hom(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$\{\cos(x), \sin(x)\}, \{e^x, e^{2x}\}, \{\cos(x), \sin(x), e^x\}, \{1, x, x^2, \dots, x^n\}.$$

- Siano V un K -spazio vettoriale e $W \subset V$ un suo sottospazio vettoriale. Introduciamo in V la relazione: $v_1 \sim v_2$ se $v_1 - v_2 \in W$.
 - Dimostrare che \sim è una relazione d'equivalenza;
 - detta $[v]$ la classe d'equivalenza di $v \in V$, dimostrare che $[v] = \{v + w | w \in W\}$, denotato anche simbolicamente $v + W$.
 - Denotiamo V/W l'insieme quoziente. Dimostrare che le seguenti definizioni di somma e prodotto in V/W sono ben poste:

$$[v_1] + [v_2] = [v_1 + v_2]; \lambda[v_1] = [\lambda v_1]$$

e definiscono su V/W una struttura di K -spazio vettoriale.

- Trovare gli inversi di tutti gli elementi non nulli di \mathbb{Z}_{13} . Si ottiene così il gruppo moltiplicativo di 12 elementi $\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}$: tale gruppo ha qualche analogia con il gruppo additivo $(\mathbb{Z}_{12}, +)$?
 - Trovare gli inversi di tutti gli elementi invertibili di \mathbb{Z}_{12} , e verificare che formano un gruppo di 4 elementi rispetto al prodotto.