Lezione. 22. Ottobre

martedì 22 ottobre 2019 14:18

Def.: RANGO di $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

$$rg(A) := \dim \operatorname{Span}(A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)})$$

(altre notazione $rk(A)$ RANK) | Ricordo che: $\operatorname{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) \subseteq \mathbb{R}^m$ oppure $\mathbb{K}^m$

si ha:
$$0 \leq rg(A) \leq m = \dim \mathbb{R}^m$$

TEOREMA: Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, e sia $\tilde{A}$ ottenuta da A con delle operazioni elementari. Allora si ha:

① $rg(A) = rg(\tilde{A})$: DIM. RIMANDATA (useremo Teorema di dimensione)

② se $\tilde{A}$ è a scala, allora
$$rg(\tilde{A}) = r = \#\text{ righe non nulle}$$
e le r colonne di A relative agli r pivot:
$$A^{(j_1)}, A^{(j_2)}, \dots, A^{(j_r)} \to \text{colonne di } A$$
sono linearmente indipendenti

③ $rg({}^tA) = rg({}^t\tilde{A})$ Dim. OMESSA

④ $rg(A) = rg({}^tA)$ Dim. OMESSA

Dim: ② $\tilde{A}$ a scala, $r = \#$ righe non nulle

es.
$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad r = 3 \quad \text{3 PIVOT}$$

5×4

Oss. che $\operatorname{Span}(\tilde{A}^{(1)}, \tilde{A}^{(2)}, \tilde{A}^{(3)}, \tilde{A}^{(4)}) \subseteq \mathbb{R}^5$

$$\subseteq \operatorname{Span}(e_1, e_2, e_3), \text{ dove } e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Infatti:
$$\begin{pmatrix}3\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = 3 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4 + 0 \cdot e_5 = 3 \cdot e_1$$
$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4 + 0 \cdot e_5 = e_1 + e_2$$
$$\begin{pmatrix}4\\2\\0\\0\\0\end{pmatrix} = 4 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2$$
$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3$$

$$\Rightarrow \tilde{A}^{(1)}, \tilde{A}^{(2)}, \tilde{A}^{(3)}, \tilde{A}^{(4)} \in \operatorname{Span}(e_1, e_2, e_3)$$

ESERCIZIO: questo implica che $\operatorname{Span}(\tilde{A}^{(1)}, \tilde{A}^{(2)}, \tilde{A}^{(3)}, \tilde{A}^{(4)}) \subseteq \operatorname{Span}(e_1, e_2, e_3)$

In generale vale un argomento simile:

siccome $\tilde{A}$ ha esattamente r righe non nulle
$$\Rightarrow \operatorname{Span}(\tilde{A}^{(1)}, \dots, \tilde{A}^{(n)}) \subseteq \operatorname{Span}(e_1, e_2, \dots, e_r)$$

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c} \text{(righe a scala)} \\ 0 \; 0 \; \cdots \; 0 \\ 0 \; \cdots \; 0 \end{array}\right) \Big\} r \qquad \text{con } e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots \quad e_r = \begin{pmatrix}0\\\vdots\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \to \text{posto } r$$

Siccome $e_1, \dots, e_r$ sono linearmente indipendenti, segue che $\dim \operatorname{Span}(e_1, \dots, e_r) = r$.

$$\Rightarrow \dim \operatorname{Span}(\tilde{A}^{(1)}, \dots, \tilde{A}^{(n)}) \leq r$$
$$= rg(\tilde{A})$$

Per dimostrare che in realtà vale $= r$, basta trovare r colonne linearmente indipendenti: allora avremo
$$r \leq \dim \operatorname{Span}(\tilde{A}^{(1)}, \dots, \tilde{A}^{(n)})$$

Affermo che:
$$\tilde{A}^{(j_1)}, \dots, \tilde{A}^{(j_r)} \quad \text{sono lin. indip.}$$

es.: $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$: $\tilde{A}^{(1)}, \tilde{A}^{(2)}, \tilde{A}^{(4)}$ sono lin. indip.

infatti: supp.
$$a \cdot \tilde{A}^{(1)} + b \cdot \tilde{A}^{(2)} + c \cdot \tilde{A}^{(4)} = 0 \in \mathbb{R}^5$$
$$a \cdot \begin{pmatrix}3\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 3a + \overset{=0}{b} + \overset{=0}{c} \\ b + \overset{=0}{c} \\ c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$c = 0$

$b = 0$

$3a = 0, \quad a = 0$

In generale:
$$\underbrace{c_1 \tilde{A}^{(j_1)} + c_2 \tilde{A}^{(j_2)} + \dots + c_r \tilde{A}^{(j_r)}}_{} = 0$$

$$(*) \quad \begin{pmatrix} c_1 \cdot a_{1j_1} + c_2 a_{1j_2} + \dots + \overset{=0}{c_r} a_{1j_r} \\ c_2 \cdot a_{2j_2} + \dots + \overset{=0}{c_r} a_{2j_r} \\ \vdots \\ c_{r-1} a_{r-1\,j_{r-1}} + \underset{=0}{c_r} a_{r-1\,j_r} \\ c_r \cdot a_{rj_r} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

Infatti, le colonne di $\tilde{A}$ relative ai pivot hanno la forma:

$$\tilde{A}^{(j_1)} = \begin{pmatrix} a_{1j_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{PIVOT}, \quad \tilde{A}^{(j_2)} = \begin{pmatrix} a_{1j_2} \\ a_{2j_2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{PIVOT}, \dots, \quad \tilde{A}^{(j_r)} = \begin{pmatrix} a_{1j_r} \\ a_{2j_r} \\ \vdots \\ a_{rj_r} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{PIVOT}$$

Considero la riga r di $*$ e trovo l'equazione:

$$c_r \cdot \overset{\neq 0}{a_{rj_r}} = 0 \Rightarrow c_r = 0$$

$$c_{r-1} \cdot \underbrace{a_{r-1\,j_{r-1}}}_{\neq 0 \text{ perché pivot}} = 0 \Rightarrow c_{r-1} = 0$$

$\vdots$

$$c_1 \cdot \overset{\neq 0}{a_{1j_1}} = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

PIVOT

$\Rightarrow$ le colonne $\tilde{A}^{(j_1)}, \dots, \tilde{A}^{(j_r)}$ sono linearmente indipendenti

INFINE: Affermo che anche
$$A^{(j_1)}, A^{(j_2)}, \dots, A^{(j_r)} \text{ sono}$$
LIN. INDIPENDENTI

Infatti:
$$(**) \quad b_1 \cdot A^{(j_1)} + b_2 \cdot A^{(j_2)} + \dots + b_r A^{(j_r)} = 0$$

TRUCCO:

cons. $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ così definito:

$$s_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j_1, \dots, j_r \\ b_k & \text{se } i = j_k \end{cases}$$

Cons. $\underbrace{A}_{m \times n} \cdot \underbrace{s}_{n \times 1} = A^{(1)} \cdot s_1 + A^{(2)} \cdot s_2 + \dots + A^{(n)} \cdot s_n$
$$= A^{(j_1)} \cdot b_1 + A^{(j_2)} \cdot b_2 + \dots + A^{(j_r)} \cdot b_r = (**)$$
$$= 0$$

Quindi: $A \cdot s = 0 \Rightarrow s$ è soluzione del sistema omogeneo $A \cdot x = 0$

$\Leftrightarrow \tilde{A} \cdot s = 0$ perché i due sistemi sono equivalenti

$$= \tilde{A}^{(j_1)} \cdot b_1 + \dots + \tilde{A}^{(j_r)} \cdot b_r = 0$$

$\Leftrightarrow b_1 = 0, \dots, b_r = 0$ perché $\tilde{A}^{(j_1)}, \dots, \tilde{A}^{(j_r)}$ sono lin. INDIP.

$\Rightarrow$ anche $A^{(j_1)}, \dots, A^{(j_r)}$ sono linearmente indipendenti

Esempio:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3×5

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{R_3 - R_1}{\overset{R_2 - R_1}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{A} \text{ ha 2 righe non nulle}$$
$$\Rightarrow rg(\tilde{A}) = rg(A) = 2$$

inoltre $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ sono indip., perché sono relative ai 2 pivot.

$\Rightarrow$ anche $A^{(1)}$ e $A^{(3)}$ sono linearmente indipendenti

cioè $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$