Lezione 23. Ottobre

mercoledì 23 ottobre 2019 11:17

Applicazioni del rango :

Abbiamo bisogno del:

TEOREMA DI DIMENSIONE :

Sia $A \in M_{m,n}(K)$, e cons.

$$A \cdot X = 0$$

Sia W il sottospazio vettoriale di K^n delle soluzioni.

Allora $\dim W = n - \operatorname{rg} A$

Dim: RIMANDATA

Es:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{rg} A = 2$$

$2 \times 3 \qquad n = 3$

$$\Rightarrow \dim W = 3 - 2 = 1$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} x_3$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} x_3 - x_3$$

se pongo $x_3 = a$, $\quad x_1 = -\frac{3}{2} a$, $\quad x_2 = -\frac{1}{2} a$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} -3/2\, a \\ -1/2\, a \\ a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} -3/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} -3/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Teorema di Rouché – Capelli (RC) : Sia $A \in M_{m,n}(K)$, sia $A \cdot X = b$ e cons. la matrice completa $(A \mid b)$. Allora:

① il sistema è compatibile $\Leftrightarrow$

$$\text{rg } A = \text{rg } (A|b) .$$

② Se il sist. è compatibile, esso possiede "∞^{n-r}" soluzioni dove $r = \text{rg } A$

(la gen. soluzione dipende da $n-r$ parametri)

Dim. : ① Abbiamo già visto Teorema:

$$A \cdot x = b \text{ è compatibile } \Longleftrightarrow b \in \text{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$$

$$\underset{\text{Lemma 1}}{\Longleftrightarrow} \quad \text{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) = \text{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underbrace{\dim \text{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})}_{\overset{\text{def}}{=} \text{rg } A} = \underbrace{\dim(\text{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b))}_{\overset{\text{df}}{=} \text{rg } ((A|b))}$$

② Abbiamo visto il Teorema di Struttura per soluzioni di sist. lin. NON OMOGENEO:

sia $\tilde{S}$ una soluzione fissata: $A\tilde{S} = b$

allora ogni soluzione si scrive

$S = \tilde{S} + S_0$ con S_0 soluzione di $A \cdot x = 0$.

$S_0 \in W$, $\dim W = n - \text{rg} A$ per Teo.

di dimensione $= n - r$

$\Rightarrow$ fisso base di W

$w_1, \dots, w_{n-r}$

$$S_0 = c_1 w_1 + \dots + c_{n-r} w_{n-r} , \quad c_1, \dots, c_{n-r} \in K$$

coeff. liberi

$$\Rightarrow \quad S = \underbrace{\tilde{S}} + \boxed{c_1} \underbrace{w_1} + \dots + \boxed{c_{n-r}} \underbrace{w_{n-r}}$$

vettori fissati

$\Longrightarrow$ la generica soluzione s dipende dagli $n-r$ parametri $c_1, .., c_{n-r}$ ("ci sono ∞^{n-r} soluzioni").

Esempio: $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x_1 = 1/2 - \frac{3}{2} x_3 \\ x_2 = -1/2 - \frac{1}{2} x_3 \end{cases}$

$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right)$ $\qquad \tilde{s} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\text{rg}\, A = 2, \qquad \text{rg}\,(A|b) = 2$

$\Longrightarrow$ Teo. RC, ci sono soluzioni: $\infty^{n-r} = \infty^{3-2} = \infty^1$

$s = \tilde{s} + s_0 \qquad , \qquad s_0 = a \cdot \begin{pmatrix} -3/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$s = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} -3/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

COROLLARIO: (Teorema di Cramer):

se $A \in M_n(\mathbb{K})$ quadrata e se A è invertibile $\Longrightarrow$ $A \cdot X = b$ è sempre compatibile, ammette 1! soluzione

$$s = A^{-1} \cdot b$$

Dim.: Siccome A è invertibile, abbiamo $\text{rg}\, A = n$ per un teorema visto; quindi $\dim \text{Span}\,(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) = n$.

Siccome si ha

$$\underbrace{\text{Span}\,(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})}_{\dim = n = \dim \mathbb{K}^n} \subseteq \text{Span}\,(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b) \subseteq \mathbb{K}^n$$

$\Longrightarrow$ anche $\dim \text{Span}\,(A^{(1)}, .., A^{(n)}, b) = n$

Quindi: $\text{rg}\, A = \text{rg}\,(A|b)$ e il sistema è compatibile per il Teorema di RC.

Inoltre ci sono "$\infty^{n-r} = \infty^{n-n} = \infty^0$" soluzioni, cioè 1.

* * *

Usando : $\underset{n\times n}{A}$ invertibile $\Leftrightarrow$ rg $A = n$

- Teorema di Cramer
- Algoritmo di Gauss

possiamo calcolare A^{-1} come segue:

Supp. rg $A = n$ e

poniamo $A^{-1} = M$: $A \cdot M = \mathbb{I}_n$

Ricordiamo che l'elemento di posto (i,j) del prodotto

è dato da: $A_{(i)} \cdot M^{(j)}$

Quindi la colonna j del prodotto

è data da $\underset{n\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{M^{(j)}} = \begin{pmatrix} A_{(1)} \cdot M^{(j)} \\ A_{(2)} \cdot M^{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \cdot M^{(j)} \end{pmatrix}$

Quindi vale $A \cdot M = \mathbb{I}_n \Leftrightarrow \begin{cases} A \cdot M^{(1)} = \mathbb{I}_n^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 \\ A \cdot M^{(2)} = \mathbb{I}_n^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_2 \\ \vdots \\ A \cdot M^{(n)} = \mathbb{I}_n^{(n)} = e_n \end{cases}$

perché $\mathbb{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & - & - & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

e le sue colonne sono i vettori $e_1, \dots, e_n$

Siccome A è invertibile, si ha che : $\begin{cases} M^{(1)} \text{ è } \overset{\text{per Cramer}}{\text{l'unica}} \text{ soluzione } A \cdot x = e_1 \\ M^{(2)} \text{ è l'unica soluzione } A \cdot x = e_2 \\ \vdots \\ M^{(n)} \text{ è l'unica soluzione } A \cdot x = e_n \end{cases}$

ALGORITMO DI GAUSS PER IL CALCOLO DI $M = A^{-1}$

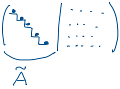
Pb.: Come risolvere contemporaneamente i sistemi lineari $A \cdot x = e_1$, $A \cdot x = e_2$, $\dots$, $A \cdot x = e_n$?

IDEA: Mettiamo le due matrici quadrate A e $\mathbb{I}_n$ una accanto all'altra, ottenendo una matrice con n righe e $n+n=2n$ colonne:

$$\left(A \mid \mathbb{I}_n\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 \cdots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

AFFERMAZIONE: Con operazioni elementari OE1, OE2 e OE3 possiamo fare in modo che la parte sinistra diventi $= \mathbb{I}_n$

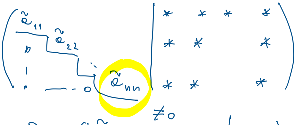
INFATTI: Cominciamo mettendo la matrice a scala:



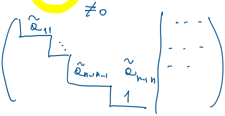
Osserviamo che siccome $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, \tilde{A} = n = \#$ di righe non nulle di $\tilde{A}$
$= \#$ di tutte le righe di A

$\Longrightarrow$ i pivot di $\tilde{A}$ sono necessariamente sulla diagonale: $\tilde{a}_{11}, \tilde{a}_{22}, \ldots, \tilde{a}_{nn}$

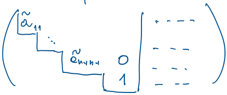
$\Longrightarrow$ APPLICO ANCORA OE1, OE2, OE3 DAL BASSO VERSO L'ALTO



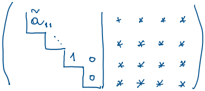
$\frac{1}{\tilde{a}_{nn}} \cdot R_n \rightsquigarrow$



$R_{n-1} - \tilde{a}_{n-1\,n} \cdot R_n \rightsquigarrow$



$\rightsquigarrow \frac{1}{\tilde{a}_{n-1\,n-1}} \cdot R_{n-1}$



COSÌ PROCEDENDO VERSO L'ALTO TROVO INFINE:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\ &1&\\ \vdots&&\ddots\\ 0&&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_{11}&\cdots&m_{1n}\\ \vdots&&\\ \vdots&&\\ m_{n1}&\cdots&m_{nn}\end{pmatrix}$$

Affermo che $M = \begin{pmatrix}m_{11}&\cdots&m_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ m_{n1}&\cdots&m_{nn}\end{pmatrix}$ è proprio la matrice cercata A^{-1}

INFATTI:

Con delle operazioni elementari abbiamo trasformato i sistemi lineari:

$$\begin{cases}A\cdot x = e_1\\ A\cdot x = e_2\\ \vdots\\ A\cdot x = e_n\end{cases} \rightsquigarrow \text{nei sistemi lineari} \begin{cases}\mathbb{I}_n\cdot x = \begin{pmatrix}m_{11}\\ \vdots\\ m_{n1}\end{pmatrix}\\ \mathbb{I}_n\cdot x = \begin{pmatrix}m_{12}\\ \vdots\\ m_{n2}\end{pmatrix}\\ \vdots\\ \mathbb{I}_n\cdot x = \begin{pmatrix}m_{1n}\\ \vdots\\ m_{nn}\end{pmatrix}\end{cases}$$

Siccome le OPERAZIONI ELEMENTARI trasformano sistemi lineari in sistemi lineari equivalenti (cioè che hanno le stesse soluzioni), e siccome:

$$x = \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}, \quad \mathbb{I}_n\cdot x = \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

i nuovi sistemi lineari sono equivalenti agli originali, e hanno la forma

$$\begin{cases}x = M^{(1)}\\ x = M^{(2)}\\ \vdots\\ x = M^{(n)}\end{cases}$$

, cioè i vettori dei nuovi termini noti sono proprio le soluzioni dei sistemi lineari, e quindi corrispondono alle colonne della matrice cercata.

Esempio: Cons. $A = \begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}$

Per capire se sia invertibile, calcolo il rango della matrice a scala:

$$\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix} \longrightarrow R_2+R_1 \begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix} : 2 \text{ pivot}$$

$\Rightarrow \operatorname{rg} A = 2$

$\Rightarrow$ è invertibile.

Trovo l'inversa:

$$(A\,|\,\mathbb{I}_2) = \left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\-1&1&0&1\end{array}\right) \xrightarrow{R_2+R_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&3&1&1\end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&1&1/3&1/3\end{array}\right) \overset{R_1-2R_2}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1/3&-2/3\\0&1&1/3&1/3\end{array}\right) \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix}1/3&-2/3\\1/3&1/3\end{pmatrix}$$

VERIFICA:

$$\begin{pmatrix}1/3&-2/3\\1/3&1/3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/3+2/3&-2/3+2/3\\-1/3+1/3&2/3+1/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \text{ ok}$$