Esercizi di Geometria
Ingegneria Industriale e Navale
2019/2020
quarto foglio - corretto

October 28, 2019

1. Si dica per quali valori del parametro $t \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare è compatibile:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 & = & 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 & = & 6 \\ 3x_1 - 5x_2 & = & 7 \\ x_1 + 5x_3 & = & t. \end{cases}$$

2. Si dica per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare è compatibile:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 & = & a \\ x_1 + x_2 - x_3 & = & 1 \\ 3x_1 - 5x_2 & = & a. \end{cases}$$

3. Si dica se il seguente sistema lineare di ordine 4 è compatibile, e nel caso affermativo se ne determini l'insieme delle soluzioni reali:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 & = & 7 \\ 4x_1 + 3x_3 + x_4 & = & 9 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 & = & -2 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 & = & -2. \end{cases}$$

4. Si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^n$, e siano

$$v_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{pmatrix}, \dots, v_s = \begin{pmatrix} p_{1s} \\ p_{2s} \\ \vdots \\ p_{ns} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

s vettori. Si dimostri che $v_1, \ldots, v_s$ sono linearmente dipendenti se e solo se il sistema lineare omogeneo

$$AX = 0, \qquad A = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1s} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{ns} \end{pmatrix}$$

ammette una soluzione NON BANALE.

5. Si determini se i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

siano linearmente dipendenti o linearmente indipendenti.

6. Si determini se i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

siano linearmente dipendenti o linearmente indipendenti.

7. Si determinino i valori del parametro t per cui i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

risultano linearmente indipendenti.

8. Si dica se i seguenti insiemi di vettori di $\mathbb{R}^2$ formano un sistema di generatori per $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{G} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{H} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{I} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Inoltre, si esprimano in tutti i casi affermativi i seguenti vettori come combinazione lineare dei generatori:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

9. Si dimostri che lo spazio vettoriale dei polinomi

$$\mathbb{R}[x]$$

non ammette un insieme finito di generatori.

10. Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$, e siano v_1, v_2 due vettori linearmente indipendenti di V. Si dimostri che $v_1 + v_2$, $v_1 - v_2$ sono ancora linearmente indipendenti.