Vale il Teorema Data una matrice $A$:
Il rango per righe coincide con il rango per colonne.
Dim. più avanti.

Esempi ① Matrice identica $E_n = (\delta_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$

② $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

rango per righe e per colonne è 2

④ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -1 & -6 \end{pmatrix}$ rg è 2

SISTEMI LINEARI DI EQUAZIONI

$A = (a_{ij})$ matrice $m \times n$ a entrate in $K$

$b_1, \dots, b_m \in K$

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

con $x_1, \dots, x_n$ incognite è un sistema lineare di $m$ equazioni in $n$ incognite

$A$ è la matrice dei coefficienti del sistema

$(A|b)$ è la matrice completa, dove $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

Una soluzione di $(*)$ è un vettore $v \in K^n$,
$v = (v_1, \dots, v_n)$ t.c. $\begin{cases} a_{11}v_1 + \dots + a_{1n}v_n = b_1 \\ \vdots \end{cases}$

Se $b_1 = \dots = b_m = 0$ sistema omogeneo

$$(**)\begin{cases} a_{11}x_1 + \text{———} + a_{1n} = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \text{———} = 0 \end{cases}$$

è il sistema omogeneo <u>associato</u> al sistema (*).

Un sistema omogeneo ha sempre la soluzione nulla $(0, \dots, 0)$
Se un sistema lineare ha almeno una soluzione si dice <u>compatibile.</u> Un sistema lineare omogeneo è sempre compatibile.
Un sistema lin. non omogeneo può essere o no compatibile; se lo è può avere una o più soluzioni.

$n = m = 1 \qquad ax = b$

Se $a \neq 0 \qquad x = \frac{b}{a} \qquad 1!$ soluzione

Se $a = 0,\ b \neq 0$ non compatibile.

Se $a = b = 0$, ogni $v \in K$ è soluzione.

<u>OSSERVAZIONE IMPORTANTE.</u>

Il sistema lineare (*) si può scrivere anche nella forma

$$x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

ossia $x_1 a^1 + x_2 a^2 + \dots + x_n a^n = b.$

Quindi: il sistema è compatibile $\Longleftrightarrow$ il

vettore $b$ è combinazione lineare dei vettori $a^1, \dots, a^n$, cioè se $b \in \langle a^1, \dots, a^n \rangle$: spazio delle colonne di $A$.
In tal caso una soluzione è data dai coefficienti di una comb. lin. di $a^1, \dots, a^n$ uguale a $b$. Se $a^1, \dots, a^n$ sono in più linearmente indipendenti, la soluzione è unica.

Esempi di conseguenze di questa osservazione.

Es. Sistema omogeneo: se le colonne di $A$ sono lin. dipendenti, ci sono soluzioni non nulle. È un "se e solo se"
Ogni colonna è un vettore di $K^m$; le colonne sono $n$: se $\boxed{n > m}$ certamente il sistema ha soluzioni non banali.

Es. Caso $m = n$.
Ho tante equazioni quante incognite. Se le colonne sono lin. indip., costituiscono una base di $K^n$. Allora, qualunque sia $b$, il sistema ha 1! soluzione.

Primo metodo di risoluzione dei sistemi lineari: algoritmo di eliminazione di Gauss.
Si trasforma il sistema di partenza (*) in un sistema lineare equivalente, mediante trasformazioni elementari nella

matrice completa $(A \vdots b)$.

Due sistemi lineari si dicono equivalenti se hanno le stesse soluzioni (lo stesso <u>insieme</u> di soluzioni).

Trasformazioni elementari di matrici.

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

<u>I</u> tipo: moltiplicazione di una riga per uno scalare $\lambda \neq 0$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I}} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_i \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

<u>II</u> tipo: addizione della $j$-esima riga alla $i$-esima

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i + a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

<u>III</u> tipo: addizione alla $i$-esima riga di un multiplo della $j$-esima

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i + \lambda a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

$$\text{III} = (\text{I}_j \rightarrow \text{II} \rightarrow \text{I}_j)$$

moltiplico per $\lambda$

moltiplica per $\frac{1}{\lambda}$

<u>IV</u> tipo: scambio di 2 righe

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

si può ottenere applicando I e II (Fischer, pag. 94)

Infatti:

$$\begin{pmatrix} a_i \\ \vdots \\ a_j \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{I}} \begin{pmatrix} a_i \\ \vdots \\ -a_j \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{II}} \begin{pmatrix} a_i \\ \vdots \\ a_i - a_j \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{III}} \begin{pmatrix} \overset{a_j}{\overset{\|}{a_i - (a_i - a_j)}} \\ \vdots \\ a_i - a_j \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{II}} \begin{pmatrix} a_j \\ \vdots \\ a_i \end{pmatrix}.$$

<u>Oss.</u> Siano $W = \langle w_1, \dots, w_r \rangle$, $U = \langle u_1, \dots, u_s \rangle$ sottospazi finitamente generati di $V$.
Si ha che $W = U$ se e solo se $w_1, \dots, w_r \in \langle u_1, \dots, u_s \rangle$ e $u_1, \dots, u_s \in \langle w_1, \dots, w_r \rangle$.

Infatti $w_1, \dots, w_r \in \langle u_1, \dots, u_s \rangle \Rightarrow \langle w_1, \dots, w_r \rangle$ è contenuto in $\langle u_1, \dots, u_s \rangle$ (perché il sottospazio generato da $w_1, \dots, w_r$ è minimo tra tutti i sottospazi contenenti $w_1, \dots, w_r$.
D'altra parte $u_1, \dots, u_s \in \langle w_1, \dots, w_r \rangle \Rightarrow$ $\langle u_1, \dots, u_s \rangle \subseteq \langle w_1, \dots, w_r \rangle$, e si ha la doppia inclusione.

Da ciò segue:

**Prop.** Lo spazio delle righe di A non cambia applicando trasformaz. elementari.
Lo si può dedurre anche dal Lemma dello scambio.

**Prop.** Dato il sistema lineare (*), consideriamo la matrice completa $(A \,|\, b)$. Se si applicano ad $(A \,|\, b)$ trasformaz. elementari, si ottiene un sistema lineare equivalente.

L'algoritmo di eliminazione di Gauss fa passare da un sistema lineare (*) ad un sistema lin. equivalente, mediante trasformazioni elementari che è "facile" da risolvere.
La matrice completa viene trasformata in una matrice a gradini o a scala.

**Def.** Matrice a gradini: è una matrice della forma:

$$M = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & p_1 & * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & 0 & 0 & p_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & & p_r & * \cdots * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & & 0 & & 0 \end{pmatrix} \\ \qquad\qquad\quad \uparrow j_1 \qquad \uparrow j_2 \qquad\qquad \uparrow j_r \end{array}$$

dove $p_1, p_2, \ldots, p_r$ sono $\neq 0$.
Sotto la "scala" è tutto 0.
Gli elementi $p_1, \ldots, p_r$ sono i pivot della matrice. Sono nelle colonne $j_1, j_2, \ldots, j_r$.
Un sistema lineare è a gradini se lo è la sua matrice completa.

$p_1$ è il primo elemento non nullo della matrice: primo pivot. Sotto è tutto 0.

$p_2$ è il primo elemento non nullo della 2ª riga, ecc.

<u>Oss.</u> Le righe $m_1, m_2, \dots, m_r$ sono linearm. indipendenti e le successive sono nulle, dunque $m_1, \dots, m_r$ formano una base dello spazio delle righe di $M$, e $r$ = rango di $M$ (per righe).

<u>Dim.</u>

Se $\lambda_1 m_1 + \dots + \lambda_r m_r = 0$, si ha:

$$\lambda_1(0 \dots 0, p_1, m_{1j_1+1}, \dots) + \lambda_2(0 \dots 0, p_2, m_{2j_2+1} \dots) + \dots$$

$$+ \lambda_r(0 \dots 0, p_r, m_{rj_r+1} \dots) = 0$$

$$(0 \dots 0, \lambda_1 p_1, \dots, \lambda_2 p_2 + \lambda_1 m_{1j_2}, \dots, \lambda_r p_r + \lambda_1 m_{1j_r} + \lambda_2 m_{2j_r} + \dots) = 0$$

Perciò $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_r = 0$.

<u>Algoritmo</u> Si parte da una matrice $M \in M(m \times n, K)$ e la si trasforma in una matrice $M'$ a scala. Se $M$ è nulla abbiamo finito. Altrimenti sia $m^{j_1}$ la prima colonna non nulla.

Scambiando eventualmente la prima riga con una riga successiva, possiamo supporre che $m_{1j_1} \neq 0$, e poniamo $p_1 = m_{1j_1}$.

Ora sommiamo alla riga h-esima, <u>per ogni $h \geq 2$,</u> un opportuno multiplo della I riga, in modo da annullare tutti gli elementi sotto a $m_{1j_1}$. D'ora in poi la prima riga resta fissa.

Consideriamo ora le righe $m_2, .., m_r$: se sono tutte nulle abbiamo finito. Altrimenti sia $j_2$ l'indice della prima colonna che contiene un elemento non nullo nelle righe dalla seconda in poi. Possiamo supp., eventualmente scambiando la seconda riga con una successiva, di avere $m_{2j_2} \neq 0$, e lo poniamo $p_2$.

Ora annulliamo tutti gli elementi sotto a $p_2$ con trasf. elem. del III tipo. E così via, finché si arriva ad avere l'ultimo pivot nell'ultima riga, oppure le ultime righe tutte nulle.

# Esempio 1.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

colonna nulla

colonna non nulla

$$\xrightarrow{III} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV}$$

conviene avere 1 come pivot, se possibile

colonna nulla sotto al I elem.

colonna non nulla sotto al I elem.

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{IV} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

colonna nonnulla sotto la II riga

posso farlo diventare 1 con la I

Il rango è 3; i pivot sono nelle colonne $j_1=2$, $j_2=4$, $j_3=5$.
$b_1, b_2, b_3$ sono lin. indip.

Se un sistema lineare ha la matrice completa a gradini, lo si risolve con il metodo di risoluzione all'indietro.

Esempio 2.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{III}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & +1 & +1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$ a gradini.
Parto dall'ultima:

$$\begin{cases} 2x_3 = 1 & x_3 = \frac{1}{2} \quad \text{sostituisco} \\ x_2 + x_3 = -1 & x_2 = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 & x_1 = +3 - \frac{1}{2} - 1 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Il sistema ha 1! soluzione.

Scrittura per indicare i sistemi lineari:

(*) $Ax = b$

(**) $Ax = 0$

**Prop.**

(i) Sia $W = \{v \in K^n \mid Av = 0\}$, soluzioni del sistema omogeneo (**): è un sottospazio vettoriale di $K^n$.

Supp. (*) compatibile.

(ii) $S = \{v \in K^n \mid Av = b\}$ non è un sottosp. vett. se il sist. non è omogeneo, è del tipo $S = \bar{v} + W$, dove $\bar{v}$ è una soluzione particolare

$\bar{v} + W = \{\bar{v} + w \mid w \in W\}$

**Dim.**

(i) $W \ni 0$ ed è chiuso risp. a somme e prod. esterno.

(ii) Se il sist. non è omogeneo, $0$ non è una soluzione, quindi $S$ non è sottospazio.

Se $Aw = 0$, e $A\bar{v} = b \Rightarrow A(\bar{v} + w) = b$.

Viceversa se $A\bar{v} = b$ e $Av = b \Longrightarrow A(v - \bar{v}) = 0$ e quindi $v - \bar{v} \in W$. ∎

$\bar{v} + W$ è un laterale di $W$ in $K^n/W$, è la classe di equivalenza di $\bar{v}$.

Ma si ha anche la seguente definizione:

**Def.** $V$ sp. vettoriale

un sottosp. affine di $V$ è un sottoinsieme di $V$ del tipo $S = v + W$; $W$ sottosp. vett.$^e$ detto (passante per $0$)

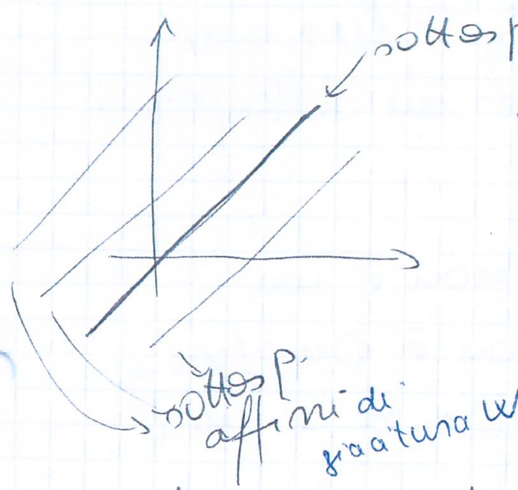
giacitura di $S$.

Oss. Se $u \in S$, $u = v + w$, allora $u + W = v + W$.

Infatti:

$u + w' = v + (w + w') \in v + W$.

$v + w' = (u - w) + w' = u + (w' - w) \in u \in W$.




Posso sostituire $v$ con qualunque altro punto di $S$.

Def. di dimensione.
Si pone $\dim S = \dim W$.

Se $\dim W = 0$, trovo i singoli elementi di $V$: sottospazi di dimensione 0.

Risoluzione dei sistemi omogenei: come trovare $\dim W$ e una sua base ($W$ sp. delle soluz.)

Es.

$$\begin{cases} x_2 + 2x_4 - x_5 - 4x_6 = 0 \\ x_3 - x_4 - x_5 + 2x_6 + x_7 = 0 \\ x_2 + 2x_4 + x_5 - 2x_6 = 0 \\ x_3 - x_4 + 2x_6 - x_7 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_7 = 0 \end{cases}$$

matrice associata

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & +2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$\to$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longleftarrow$$

a gradini

$j_1=2, j_2=3, j_3=5, j_4=6$

rango 4

Il sist. è a gradini equivalente

$$\begin{cases} x_6 + 2x_7 = 0 \\ x_5 + x_6 = 0 \\ x_3 - x_4 - x_5 + 2x_6 + x_7 = 0 \\ x_2 + 2x_4 - x_5 - 4x_6 = 0 \end{cases}$$

$x_7$ : libero

$x_6 = -2x_7$

$x_5 = -x_6 = 2x_7$

$x_4$ libero

$x_3 = x_4 + x_5 - 2x_6 - x_7 =$

$= x_4 + 2x_7 + 4x_7 - x_7 =$

$= x_4 + 5x_7$

$x_2 = -2x_4 + x_5 + 4x_6$

$= -2x_4 + 2x_7 - 8x_7$

$= -2x_4 - 6x_7$

$x_1$ libero

Parametri liberi sono le incognite ~~contenute~~ delle colonne non contenenti i pivot. Sono $n-r$.

Soluzione generale del sistema è:

$(x_1, -2x_4-6x_7, x_4+5x_7, x_4, 2x_7, -2x_7, x_7) =$
$= x_1(1,0,0,0,0,0,0) + x_4(0,-2,1,1,0,0,0) +$
$+ x_7(0,-6,5,0,2,-2,1)$

$\boxed{= x_1 w_1 + x_4 w_2 + x_7 w_3}$

$w_1, w_4, w_7$ sono lin. indipendenti, perché se $x_1 w_1 + x_4 w_2 + x_7 w_3 = 0$, si ha $x_1 = 0$, $x_4 = 0$, $x_7 = 0$ in quanto sono alcune delle componenti della sol.

$\Rightarrow$ base dello ~~sist~~ spazio delle soluzioni

Ha dim $3 = \underset{\#\text{var.}}{7} - \underset{\text{rango}}{4}$

In gen. $Ax = 0$ in $K^n$ si ha:
dim $W$ = numero di param. liberi =
$= n -$ (numero dei pivot) $= n - rg(A) = n - r$. (per righe)

Teorema di Rouché-Capelli

Il sist. $Ax = b$ è compatibile $\Leftrightarrow$
$rg\, A = rg(A|b)$ (rango per righe)

Dim. $A' = (A|b) \xrightarrow{\text{trasf. elem.}} (B|c)$ con ~~BXXXX~~ B a gradini

$$\left(\begin{array}{ccc|c} b_{1j_1} & & & c_1 \\ & b_{2j_2} & & \vdots \\ & & b_{rj_r} & c_r \\ & 0 & & c_{r+1} \\ & & & \vdots \\ & & & c_m \end{array}\right)$$

$Ax = b$ è comp.
$\Updownarrow$
$c_{r+1} = \dots = c_m = 0$

Con la stessa sequenza di trasformaz. elem. trasformo in matrici a gradini sia A sia $A' = (A|b)$. Sia $r = rg(A)$

I ranghi sono diversi se e solo se nell'ultima colonna ho più di $r$ elementi;

Ho un pivot nella riga $r+1$.

In tal caso l'ultima equazione non è compatibile. ∎

Ricapitolando: Sia A $m \times n$.

Il sist. lineare $Ax = b$ è compatibile se e solo se $rg A = rg(A|b)$. <u>rango per righe.</u>

In particolare se il sistema è omogeneo è compatibile e

~~tosp~~ l'insieme delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di $K^n$ di dimensione $n - r$, dove $r = rg(A)$.

Se il sistema non è omogeneo, ed è compatibile l'insieme delle soluzioni è del tipo

$S = \bar{v} + W_0$ dove $\bar{v}$ è una soluzione e $W_0$ è lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato $Ax = 0$.

È ~~uno spazio~~ sottospazio <u>affine</u> di $K^n$ di dimensione pari a $\dim W_0 = n - rg A = n - rg(A|b)$.

Per risolvere il sistema, si riduce $(A|b)$ a gradini. Dopo aver verificato che i ranghi siano uguali, si procede col metodo di sostituzione all'indietro, che fornisce una soluzione particolare e una base per $W_0$.

Esempio

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = 2 \\ x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

compatibile

$j_1 = 1, \ j_2 = 3$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ -x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

$x_4$ param. libero

$x_3 = -x_4 - 1$

$x_2$ param. libero

$x_1 = 2x_2 - x_3 + 1 = 2x_2 + x_4 + 1 + 1 = 2x_2 + x_4 + 2$

$$(2x_2 + x_4 + 2, \ x_2, \ -x_4 - 1, \ x_4) =$$
$$= x_2 \underbrace{(2, 1, 0, 0)}_{w} + x_4 \underbrace{(1, 0, -1, 1)}_{w'} + (2, 0, -1, 0)$$

$W_0 = \langle w, w' \rangle$ ha dim $2$, $(w, w')$ è una base.

$v = (2, 0, -1, 0)$ è una soluz. partic., ottenuta per $x_2 = x_4 = 0$.