Lezione 28 ottobre

lunedì 28 ottobre 2019 11:16

Determinante: è un numero (scalare) assoc. a matrice quadrata

Vediamo prima il caso

$$A \in M_2(K)$$

Def: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, il DETERMINANTE di A

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} a_{21} \in K$$

SIGNIFICATO GEOMETRICO:

Pensiamo alle colonne di A come vettori di $\mathbb{R}^2$

e per semplicità poniamo:

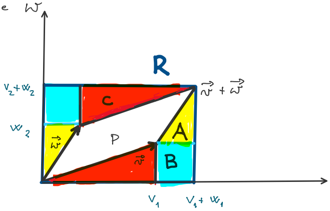
$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}$$

Supp. anche $v_1 > 0$, $v_2 > 0$, $w_1 > 0$, $w_2 > 0$

I due vettori corrispondono a vettori geometrici

$\vec{v}$ e $\vec{w}$



$$= \underline{(v_1 + w_1) \cdot (v_2 + w_2)} - 2 \cdot \underline{\frac{w_1 \cdot w_2}{2}} - 2 \cdot \underline{w_1 \cdot v_2} - 2 \cdot \underline{\frac{v_1 \cdot v_2}{2}}$$

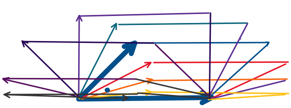
$$\text{Area}(P) = \cancel{v_1 \cdot v_2} + v_1 \cdot w_2 + w_1 \cdot v_2 + \cancel{w_1 \cdot w_2} - \cancel{w_1 \cdot w_2} - 2 w_1 v_2 - \cancel{v_1 \cdot v_2}$$

$$= \boxed{v_1 w_2 - w_1 v_2}$$

$A = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}$, $\det A = v_1 w_2 - w_1 \cdot v_2$

Quindi: in questo caso il det può essere interpretato come un'area di un parallelogramma

Domanda: se i 2 vettori sono proporzionali, oppure 1 dei due è nullo, cosa succede?



il parallelogramma si "schiaccia" a un segmento, e la sua area diventa zero.

Vediamo cosa ci dà la formula nel caso di vettori proporzionali:

$$A = \begin{pmatrix} v_1 & c\,v_1 \\ v_2 & c\,v_2 \end{pmatrix} \qquad c \in \mathbb{R}$$

$\det A = v_1 \cdot c v_2 - c v_1 \cdot v_2 = 0$ ok.

Ora se $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

mi aspetto area 0

e infatti: $A = \begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ v_2 & 0 \end{pmatrix}$, $\det A = v_1 \cdot 0 - 0 \cdot v_2 = 0$

FATTO: Comunque si scelgano 2 vettori non proporzionali e non nulli $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$, si ha

$$\text{Area}\ (P) = |\det A| \quad \text{con } A = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}$$

↳ MODULO (in $\mathbb{R}$)

Inoltre: osserviamo che

$\det A \neq 0 \iff$ i vettori colonna sono linearmente indipendenti $\iff \operatorname{rg} A = 2 \iff A$ è invertibile

ovvero $\det A = 0 \iff$ i vettori colonna sono DIPENDENTI $\iff \operatorname{rg} A < 2$

Quindi: $\det A \neq 0 \iff A$ è invertibile

Questo fatto si può dimostrare direttamente:

INFATTI: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, e sia

$$B = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Calcoliamo $A \cdot B$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & -a_{11}a_{12} + a_{12}a_{11} \\ a_{21}a_{22} - a_{22}a_{21} & -a_{21}a_{12} + a_{11}a_{22} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} \det A & 0 \\ 0 & \det A \end{pmatrix}$$

$$= \det A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \det A \cdot I_2$$

$A \cdot B = \det A \cdot I_2$ se $\det A \neq 0$

$\Rightarrow A \cdot \frac{1}{\det A} \cdot B = I_2$

analog: $B \cdot A = \det A \cdot I_2$

$\frac{1}{\det A} B \cdot A = I_2$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot B$$

CASO GENERALE:

Def: Data $A \in M_n(K)$ e siano i e j due indici con $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$.

Il MINORE (i,j) di A è la matrice

$$A_{ij} \in M_{n-1}(K)$$

che si ottiene da A cancellando la riga i e la colonna j.

Es: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow A_{11}$

$A_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad A_{23} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Def. DI DETERMINANTE di $A \in M_n(K)$

diamo una definizione RICORSIVA:

① se $n = 1$ $\qquad A = (a_{11})$

$$\det A := a_{11}$$

② se $n > 1$, $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$$⊛ \ \det A := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \, a_{i1} \cdot \det A_{i1}$$

oss. se $n = 2$: $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\quad a_{22} = A_{11}$

proviamo ad applicare la nuova formula:

$$⊛ \ \det A = \sum_{i=1}^{2} (-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot \det A_{i1}$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \underbrace{\det A_{11}}_{1\times 1} + (-1)^{2+1} \cdot a_{21} \cdot \det A_{21}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

$\Longrightarrow$ la formula ⊛ è una generalizzazione del determinante di prima.

Vediamo anche $n = 3$:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad A_{21}$

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \cdot \det A_{11} + (-1)^{2+1} a_{21} \cdot \det A_{21} + (-1)^{3+1} \cdot a_{31} \cdot \det A_{31}$$

$i = 1,2,3$

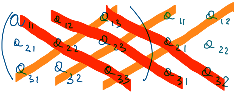
$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $A_{21} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$A_{31} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$

sviluppando i conti si trova:

$$\det A = \dots = \underline{a_{11}\, a_{22}\, a_{33}} + \underline{a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}} + \underline{a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}}$$
$$- \underline{a_{13}\, a_{22}\, a_{31}} - \underline{a_{11}\, a_{23}\, a_{32}} - \underline{a_{12}\, a_{21}\, a_{33}}$$

REGOLA DI SARRUS:



a_{11} a_{12} a_{13} a_{11} a_{12}
a_{21} a_{22} a_{23} a_{21} a_{22}
a_{31} a_{32} a_{33} a_{31} a_{32}

Ricopiamo a destra le prime due colonne e identifichiamo le 6 diagonali come in figura;

poi moltiplichiamo le terne su ogni diagonale; le terne evidenziate in rosso appaiono con il segno +, quelle in arancione con il segno −.

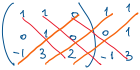
Esempio: usiamo prima la formula ricorsiva per calcolare $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; si ha:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + (-1) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot (1 \cdot 2 - 0 \cdot 3) - 1 \cdot (1 \cdot 0 - 0 \cdot 1)$$

$$= 2$$

con Sarrus



$$\underline{1 \cdot 1 \cdot 2} + 1 \cdot 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 \cdot 3 - (-1) \cdot 1 \cdot 0 - 3 \cdot 0 \cdot 1$$
$$- 2 \cdot 0 \cdot 1$$

$$= 2$$

TEOREMA (Proprietà del determinante):

(D1) Se la riga i di A è somma del tipo

$A_{(i)} = R' + R''$ con $R', R'' \in M_{1,n}(K)$

$$\Rightarrow \det A = \det \begin{array}{c} \\ \\ i \to \\ \\ \end{array}\!\!\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ R'+R'' \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ R' \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ R'' \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

vale $\forall\, i = 1, \dots, n$ (è additivo sulle righe)

Inoltre: se $A_{(i)} = c \cdot R'$, $R' \in M_{1,n}(K)$, $c \in K$

$$\Rightarrow \det A = \det \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \to \\ \\ \\ \end{array}\!\!\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ c \cdot R' \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = c \cdot \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ R' \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

è OMOGENEO SULLE RIGHE

(si dice che det è **MULTILINEARE** sulle righe)

23.10.2019

(D2) Se facciamo uno scambio di righe di A

$A_{(i)} \longleftrightarrow A_{(j)}$ ⇒ il det cambia segno

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = - \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

Si dice che det è una funzione ANTISIMMETRICA delle righe.

(D3) $\det I_n = 1$ $\left(\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1\right)$

NORMALIZZAZIONE del det

TEOREMA (UNICITÀ DEL DET)

Il det è l'unica funzione

$$M_n(K) \longrightarrow K$$

che gode di (D1), (D2), (D3).

CONSEGUENZE: Supp. $K = \mathbb{R}$ opp. $\mathbb{C}$ opp. $\mathbb{Q}$
(non K = campo finito)

1. Se A ha 2 righe uguali, allora
$$\det A = 0$$

2. Se A ha una riga tutta nulla, allora
$$\det A = 0$$

3. Se $\tilde{A}$ è ottenuta da A tramite

OE1 e OE3

$$\Rightarrow \quad \det \tilde{A} = (-1)^{\sigma} \det A$$

dove σ = # di volte OE1 (# di scambi)

4. Sia A una matrice TRIANGOLARE SUPERIORE

cioè: $\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$ cioè: $a_{ij} = 0$ per ogni i,j con $i > j$.

Allora $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$

In particolare: questo vale per tutte le matrici a scala e tutte le matrici diagonali.

Dim. 1. se $A_{(i)} = A_{(j)}$

per $\boxed{D2}$, scambiando la riga i con la riga j il det cambia segno; essendo le due righe uguali, la matrice non cambia $\Rightarrow$

$$\det A = -\det A$$

$$2\det A = 0$$

$$\Rightarrow \det A = 0 \quad (\text{in } \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}, ..)$$

2. Supp. $A_{(i)} = (0\ 0 \cdots 0) = 0 \cdot (1\ 1 \cdots 1)$

$$\boxed{D2} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ (0 \cdots 0) \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} =$$

$$= 0 \cdot \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ (1 \cdots 1) \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = 0$$

3. Se applico una volta l'operazione OE1, cioè uno scambio, il determinante cambia segno;
se ho σ scambi, il det è moltiplicato per $(-1)^{\sigma}$

Vediamo come cambia il determinante applicando una

$$OE3: \quad A_{(i)} \longleftrightarrow A_{(i)} + c \cdot A_{(j)}$$

$$\det A = \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

d'altra parte:
$$\det\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)}+cA_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} \overset{\textcircled{D1}}{=} \det\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \underbrace{c\det\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}}_{=0 \text{ perchè ha 2 righe uguali}} = \det A$$

4. Sia A matrice triangolare superiore, allora
$\det A = a_{11}\cdot a_{22}\cdot \ldots \cdot a_{nn}$.

Dim. per induzione su n: $A \in M_n(\mathbb{K})$

$n=1$ $A=(a_{11})$, $\det A = a_{11}$ ok.

Supp. vero per $n-1$, e mostriamo che vale per n:

Si ha:
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

per def. il

al variare di i compaiono tutti gli elementi della prima colonna

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \boxed{a_{i1}} \cdot \det A_{i1}$$

$$= a_{11}\cdot \det A_{11} \quad \text{perchè } a_{i1}=0$$

Inoltre il minore

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\ 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$ è di nuovo una matrice triangolare superiore

$\forall i > 1$ perché è triangolare superiore

$\in M_{n-1}(K)$

$\Rightarrow$ Posso applicare ipotesi induttiva

$\Rightarrow \det A_{11} = a_{22} \cdot a_{33} \cdot \cdots \cdot a_{nn}$

$\Rightarrow \det A = a_{11} \cdot \det A_{11} = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$