Esercizi 29 ottobre 2019

martedì 29 ottobre 2019 15:19

Esempi:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2\cdot 1 - 3\cdot 1 = -1$$

$$A_{(1)} = (2\ \ 3) = (1\ \ 1) + (1\ \ 2)$$

D1 : $\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=0 \text{ poiché 2 righe uguali}} + \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= 1\cdot 1 - 1\cdot 1 +$

$+ 1\cdot 1 - 2\cdot 1 = -1$

- $$\left(\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{matrix}\right)\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{matrix}$$

$\det = 1\cdot 1\cdot 1 + 0\cdot 0\cdot 2 + 2\cdot 0\cdot 0 - 2\cdot 1\cdot 2 - 1\cdot 0\cdot 0 - 0\cdot 0\cdot 1$

$= 1 - 4 = -3$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}\right)\begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

$\det = 1\cdot 0\cdot 0 + 0\cdot 1\cdot 0 + 2\cdot 2\cdot 1$

$- 0\cdot 0\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot 1 - 0\cdot 2\cdot 0$

$= 4 - 1 = 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ la mettiamo a scala

$$\xrightarrow{R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \tilde{A}$$ triang. sup.

$\det\tilde{A} = 1\cdot 1\cdot(-3) = -3 = \det A$

ho fatto $\sigma = 0$ scambi

- $$\left(\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix}\right)\begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

$\det = \cancel{1\cdot 2\cdot 1} + \cancel{2\cdot 4\cdot 1}$

$+ 0\cdot 1\cdot 2 - 1\cdot 2\cdot 0 - \cancel{2\cdot 4\cdot 1}$

$- \cancel{1\cdot 1\cdot 2} = 0$

- $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$\xrightarrow{\substack{R_3 - R_1 \\ R_4 - 3R_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_3 - \frac{1}{2}R_2 \\ R_4 - 5R_3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$\det\tilde{A} = 1\cdot 2\cdot(-1)\cdot(-3) = 6 = \det A$

poiché 0 scambi

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$; se $\det A \neq 0$

$\Rightarrow$ A è invertibile, e $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

es. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$\det A = 1\cdot 4 - 0\cdot 1 = 4$

calcoliamo A^{-1} con Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$R_2 - R_1$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$\frac{1}{4}R_2$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$= A^{-1}$

FORMULA DEI COFATTORI

confrontiamo con $\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

$\det A = 4$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/4 & 1/4 \end{pmatrix} = A^{-1}$

OSSERVAZIONE sul procedimento di completamento a una base

Siano $v_1, \dots, v_k$ dei vettori linearmente indipendenti; per il Teorema di Completamento, si possono completare a una base di V nel modo seguente:

fisso $w_1, \dots, w_n$ generatori

cons. $v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_n$; essi sono ancora dei generatori $\Rightarrow$ posso estrarre una base per il Teorema di Estrazione.

ad es.:

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, voglio completare a una base di $\mathbb{R}^4$:

cons. $v_1, v_2, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Possiamo estrarre una base con l'algoritmo dello scarto, oppure usando l'algoritmo di Gauss nel modo seguente: cons. la matrice

$$A = \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

with the last four columns $\underbrace{}_{I_4}$

la riduco a scala, determino le colonne dei pivot e scelgo le colonne di A relative ai pivot