Lezione 16 ottobre 2019

mercoledì 16 ottobre 2019 10:45

Teorema del Completamento

Sia V sp. vett. su $\mathbb{K}$ e supp. che V abbia un insieme finito di generatori.

Siano $v_1, \dots, v_k \in V$ vettori linearmente indipendenti.

Allora $\exists$ base $\mathcal{B}$ tale che $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq \mathcal{B}$

(CIOÈ: i vettori $v_1, \dots, v_k$ possono essere completati, aggiungendo altri vettori, a una base di V).

<u>Dim.</u> Per ipotesi, V ammette insieme finito di generatori: $u_1, \dots, u_m$.

$\Rightarrow$ se considero $v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_m$, questi sono ancora generatori per V

(infatti ogni $v \in V$ si può scrivere nella forma

$$v = c_1 u_1 + \dots + c_m u_m = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_k + c_1 u_1 + \dots + c_m u_m$$)

Applichiamo il Teorema di Estrazione: con l'algoritmo visto posso estrarre da $v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_m$ una base $\mathcal{B}$

Siccome $v_1, \dots, v_k$ sono LIN. INDIP. si ha:

$v_1 \neq 0$, $v_2 \notin \mathrm{Span}(v_1)$, $v_3 \notin \mathrm{Span}(v_1, v_2)$, …

… $v_k \notin \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_{k-1})$, quindi tutti i v_i vengono scelti dall'algoritmo, e si ha $v_1, \dots, v_k \in \mathcal{B}$.

Esempio: $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^4$

sono linearmente indipendenti

Abbiamo visto: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

sono generatori di $\mathbb{R}^4$

$\Rightarrow$ è possibile estrarre una base $\mathcal{B}$ da

$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} \in \mathcal{B}$ perché linearmente indipendenti

oss. che $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \notin \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}\right)$; infatti l'equazione

$$\underbrace{c_1 \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix}c_1 + c_2\\2c_2\\c_1 + 3c_2\\4c_2\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

non ha soluzioni,

perché il sistema $\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_2 = 0 \\ c_1 + 3c_2 = 0 \\ 4c_2 = 0 \end{cases}$ è incompatibile (impossibile)

$\Rightarrow$ pongo $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \in \mathcal{B}$

Analogamente si può verificare che

$\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \notin \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right)$

infatti: $c_1 \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ 2c_2 = 1 \\ c_1 + 3c_2 = 0 \\ 4c_2 = 0 \end{cases}$ è un sistema incompatibile

$\Rightarrow$ pongo $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \in \mathcal{B}$. Si può dimostrare facilmente che $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ sono generatori di $\mathbb{R}^4$ $\Rightarrow$ formano una base

LEMMA DI STEINITZ:

Se V ha una base $\{v_1, \dots, v_n\}$, allora

$\forall\, p > n$ e per ogni scelta di p vettori $w_1, \dots, w_p$, essi sono linearmente dipendenti.

Dim. Consideriamo le coordinate dei vettori w_j nella base $\{v_1, \dots, v_n\}$, cioè gli scalari c_{ij} univocamente determinati che permettono di scrivere:

$$w_1 = c_{11} v_1 + c_{21} v_2 + \dots + c_{n1} v_n$$

$$\vdots$$

$$w_p = c_{1p} v_1 + c_{2p} v_2 + \dots + c_{np} v_n$$

e consideriamo la matrice A, le cui colonne sono formate dalle coordinate di ciascun vettore:

$$A = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{np} \end{pmatrix}$$

Come nel caso di vettori di $\mathbb{R}^n$, è facile verificare che $w_1, \dots, w_p$ sono linearmente dipendenti $\Leftrightarrow$ il sistema lineare omogeneo $A \cdot x = 0$ ammette una soluzione non banale.

Osserviamo ora che il sistema $A \cdot X = 0$ ha n equazioni e $p (> n)$ incognite $\Rightarrow$ c'è almeno 1 incognita libera; infatti, la matrice a scala $\tilde{A}$ ottenuta da A con operazioni elementari ha almeno 1 gradino di lunghezza ≥ 2 perché il numero di righe $= n <$ numero di colonne $= p$.

Quindi: risolvendo il sistema $\tilde{A} \cdot X = 0$ dal basso verso l'alto, al più n incognite si scriveranno in funzione delle altre, e $p - n \geq 1$ incognite saranno libere.

Per avere una soluzione non banale è sufficiente, quindi, fissare ad esempio il valore 1 per le incognite libere, e calcolare le rimanenti in funzione di queste.

Avremo così ottenuto una soluzione

$$s \neq \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Teorema: Sia V spazio vettoriale. Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $\{w_1, \dots, w_p\}$ sono 2 basi di V $\Rightarrow$ $n = p$.

Dim.: $\{v_1, \dots, v_n\}$ base, $w_1, \dots, w_p$ lin. indipendenti $\overset{\text{Lemma Steinitz}}{\Rightarrow} p \leq n$

$\{w_1, \dots, w_p\}$ base, $v_1, \dots, v_n$ lin. indipendenti $\overset{\text{Lemma Steinitz}}{\Rightarrow} n \leq p$

$\Rightarrow n = p$.

<u>Def.</u>
- Se $V = \{0\}$ spazio nullo, definiamo la dimensione $\dim V = 0$
- Se $V \neq \{0\}$ e ammette un numero finito di generatori, definiamo la dimensione

$\dim V = \#$ (numero) di vettori di una qualunque base

Esempi

① Se $V = \mathbb{R}$, una sua base è, ad esempio, $\{1\}$; infatti, 1 è un generatore perché $\forall r \in \mathbb{R}$, possiamo scrivere $r = \underbrace{r}_{\in \mathbb{R}\ \text{scalare}} \cdot 1$;
inoltre $1 \neq 0$, quindi è linearmente indipendente
$\Rightarrow \dim \mathbb{R} = 1$.

② Se $V = \mathbb{R}^2$, una sua base è, ad esempio, $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \dim \mathbb{R}^2 = 2$

ⓝ Se $V = \mathbb{R}^n$, una sua base è, ad esempio, $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \dim \mathbb{R}^n = n$.

③ Sia $V = M_{m,n}(\mathbb{R})$; una sua base è data dalle matrici

$$E_{(i,j)}$$

che hanno 1 al posto i,j e 0 altrove; siccome sono in tutto $m \cdot n$

$\Rightarrow \dim M_{m,n}(\mathbb{R}) = m \cdot n$