ESERCIZI DI GEOMETRIA 1, FOGLIO 3

Trieste, 30 ottobre 2019

1. Dati due K-spazi vettoriali V, W, dimostrare che il loro prodotto cartesiano $V \times W$ è un K-spazio vettoriale rispetto alle operazioni così definite:

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2), \quad \lambda(v, w) = (\lambda v, \lambda w).$$

Dimostrare che, se $v_1, \dots, v_n$ formano una base di V e $w_1, \dots, w_m$ una base di W, allora $(v_1, 0), \dots, (v_n, 0), (0, w_1), \dots, (0, w_m)$ è una base di $V \times W$. Calcolare la dimensione di $V \times W$.

2. Sia $w_1, \dots, w_m$ una base del sottospazio W di V, e sia $w_1, \dots, w_m, v_{m+1}, \dots, v_n$ un suo prolungamento a una base di V. Dimostrare che le classi d'equivalenza $[v_{m+1}], \dots, [v_n]$ costituiscono una base dello spazio quoziente V/W (introdotto nel foglio 2, esercizio 3).

3. Una matrice quadrata $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in M(n \times n, \mathbb{R})$ è detta simmetrica se A coincide con la sua trasposta ${}^tA$, ossia se $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni coppia di indici i, j. A è detta invece antisimmetrica se $A = -{}^tA$.
(i) Dimostrare che le matrici simmetriche formano un sottospazio vettoriale, denotato con $Sym(n \times n, \mathbb{R})$, di $M(n \times n, \mathbb{R})$; trovare una base e la dimensione di questo sottospazio.
(ii) La stessa cosa per le matrici antisimmetriche $Alt(n \times n, \mathbb{R})$.
(iii) Dimostrare che $M(n \times n, \mathbb{R}) = Sym(n \times n, \mathbb{R}) \oplus Alt(n \times n, \mathbb{R})$ (somma diretta).

4. Dire, motivando la risposta, se in $\mathbb{R}^3$ il vettore w è o meno combinazione lineare di v_1, v_2, v_3 nei seguenti casi:
(i) $w = (6, 2, 1), v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (7, 3, 1), v_3 = (2, 5, 8)$;
(ii)$w = (2, 1, 1), v_1 = (1, 5, 1), v_2 = (0, 9, 1), v_3 = (3, -3, 1)$.

5. Si consideri il sistema lineare a coefficienti in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 3x_4 + x_5 & = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 & = 0 \\ -x_1 + x_3 - x_4 + x_5 & = 1 \\ x_1 - x_3 + 5x_4 + 3x_5 & = 3. \end{cases}$$

Scrivere la matrice A dei coefficienti e la matrice completa A' del sistema. Applicare l'algoritmo di Gauss per trasformarle in matrici a gradini, indicando i gradini e i pivot. Scrivere poi il nuovo sistema lineare a gradini, indicare i parametri liberi, trovare lo spazio delle soluzioni W del sistema omogeneo associato, una base di W e una soluzione particolare del sistema generale.