Lezione 31. Ottobre

giovedì 31 ottobre 2019 11:24

FORMULA DEI COFATTORI PER MATRICE INVERSA

Def: Sia $A \in M_n(K)$, e fissiamo $i,j \in \{1,\dots,n\}$. Il **COFATTORE** i,j di A è lo scalare

$$(-1)^{i+j} \det \underbrace{A_{ij}}_{\text{minore } i,j}$$

La **MATRICE DEI COFATTORI** di A

$$\operatorname{cof}(A) \in M_n(K)$$

è la matrice il cui elemento di posto ij è il cofattore (i,j).

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

cofattori: $(1,1)$: $(-1)^{1+1} \cdot \det A_{11}$

$= 2$

$(1,2)$: $(-1)^{1+2} \cdot \det A_{12}$

$= -1$

$(2,1)$: $(-1)^{2+1} \cdot \det A_{21}$

$= -1 \cdot 0 = 0$

$(2,2)$: $(-1)^{2+2} \cdot \det A_{22}$

$= 3$

$$\operatorname{cof} A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad {}^t(\operatorname{cof} A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Trucco per ricordare i segni di cof A:

$$\left(\begin{array}{cccccccc} + & - & + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & + & - & \vdots \\ + & - & + & - & + & - & + & \vdots \\ - & + & - & + & - & + & - & \vdots \\ + & \cdots & & & & & & \end{array}\right)$$

PROP.: $A \in M_n(K)$

Allora vale

$$A \cdot {}^t(\operatorname{cof} A) = {}^t(\operatorname{cof} A) \cdot A = \det A \cdot \mathbb{I}_n$$

Ricordo: lunedì:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}}^{B} = \det A \cdot \mathbb{I}_2$$

Esercizio: verificate che $B = {}^t(\operatorname{cof} A)$

COROLLARIO della Prop.:

Se $\det A \neq 0$, allora vale anche

$$A \cdot \underbrace{\frac{1}{\det A} \cdot {}^t(\operatorname{cof} A)}_{M} = \underbrace{\frac{1}{\det A} \cdot {}^t(\operatorname{cof} A)}_{M} \cdot A = \mathbb{I}_n$$

quindi $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \, {}^t(\operatorname{cof} A).}$

Dim. Prop.: voglio calcolare

$$\left(A \cdot {}^t(\operatorname{cof} A)\right)_{ij} = A_{(i)} \cdot \left({}^t(\operatorname{cof} A)\right)^{(j)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot \left(\left({}^t(\operatorname{cof} A)\right)_{kj}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot (\operatorname{cof} A)_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot (-1)^{j+k} \cdot \det A_{jk} \quad ⊛$$

Oss. che ⊛ se $i=j$, è la formula di Laplace per sviluppo del det secondo la i-esima riga.

$\Rightarrow$ se $i=j$, ⊛ $= \det A$

se invece $i \neq j$, cons. la matrice

A' ottenuta da A sostituendo alla riga j la riga i, e lasciando invariate tutte le altre (compresa la i).

$$\det A' \underset{\downarrow}{=} \sum_{k=1}^{n} a'_{jk} \cdot (-1)^{j+k} \cdot \det A'_{jk}$$

sviluppo secondo la riga j

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot (-1)^{j+k} \cdot \det A_{jk}$$

$$= \circledast$$

D'altra parte $\det A' = 0$ perché A' ha 2 righe uguali

$\Rightarrow$ se $i \neq j$, $\circledast = 0$

Posso scrivere:

$$\circledast = \det A \cdot \underbrace{\boxed{\delta_{ij}}}_{\text{Kronecker}}$$

elemento di posto i,j di $\mathbb{I}_n$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$= (A \cdot {}^t(\operatorname{cof} A))_{ij}$$

$$\Rightarrow \quad A \cdot {}^t(\operatorname{cof} A) = \det A \cdot \mathbb{I}_n$$

Analogamente: ${}^t(\operatorname{cof} A) \cdot A = \det A \cdot \mathbb{I}_n$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$${}^t\operatorname{cof} A = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot \det A_{11} & -\det A_{21} & \det A_{31} \\ -\det A_{12} & \det A_{22} & -\det A_{32} \\ \det A_{13} & -\det A_{23} & \det A_{33} \end{pmatrix}$$

supp. $i = j = 2$

$$(A \cdot {}^t(\operatorname{cof} A))_{ij} = A_{(2)} \cdot \left({}^t(\operatorname{cof} A)\right)^{(2)}$$

$$= a_{21} \cdot (-\det A_{21}) + a_{22} \cdot \det A_{22} + a_{23} \cdot (-\det A_{23})$$

= formula di Laplace per $\det A$ secondo la 2^a riga

Se invece cons. $i = 2$, $j = 3$

se fosse el. di posto 3,2

$$(A \cdot {}^t(\operatorname{cof} A))_{23} = \boxed{a_{21}} \cdot \det A_{31} + \boxed{a_{22}} \cdot (-\det A_{32}) + \boxed{a_{23}} \det A_{33}$$

se fosse el. di posto 31 — se fosse posto 3,3

sarebbe la formula del determinante lungo la 3^a riga

IDEA: Considero una nuova matrice in cui al posto 3,1 c'è a_{21}, al posto 3,2 mettiamo a_{22} e al posto 33 mettiamo a_{23}

cioè: SOSTITUISCO la TERZA RIGA con la SECONDA RIGA, e costruisco una matrice con DUE RIGHE UGUALI:

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \underbrace{a_{21}}_{a'_{31}} & \underbrace{a_{22}}_{a'_{32}} & \underbrace{a_{23}}_{a'_{33}} \end{pmatrix}, \quad \det A' = 0$$

D'altra parte: sviluppo 3 riga: $\det A' = (-1)^{3+1} \cdot a'_{31} \cdot \det A'_{31} + (-1)^{3+2} \cdot a'_{32} \cdot \det A'_{32} + (-1)^{3+3} \cdot a'_{33} \cdot \det A'_{33}$

$$= (-1)^{3+1} \cdot a_{21} \cdot \det A_{31} + (-1)^{3+2} \cdot a_{22} \cdot \det A_{32} + (-1)^{3+3} \cdot a_{23} \cdot \det A_{33}$$

$$\Rightarrow \quad A \cdot ({}^t \operatorname{cof} A) = \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix}$$

$$= \det A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

* * *

FORMULA DI CRAMER

Già visto Teo. di Cramer: sistemi lineari quadrati:

$$A \cdot X = b, \quad A \in M_n(K)$$

e invertibile

$$\Rightarrow \exists! \text{ soluzione } s = A^{-1} \cdot b$$

Formula di Cramer:

$$S = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad s_i = \frac{\det \left(A^{(1)} A^{(2)} \cdots A^{(i-1)}\, b\, A^{(i+1)} \cdots A^{(n)} \right)}{\det A}$$

Dim.: $\underset{n \times 1}{s} = A^{-1} \cdot b$, $\quad s_i = (A^{-1})_{(i)} \cdot b$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\det A} \cdot ({}^t \operatorname{cof} A)_{ik} \cdot b_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\det A} (\operatorname{cof} A)_{ki}\, b_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\det A} (-1)^{k+i} \cdot \det A_{ki} \cdot b_k$$

$$= \frac{1}{\det A} \cdot \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i}\, b_k \cdot \det A_{ki} \right)}_{= \det \left(A^{(1)} \cdots A^{(i-1)}\, b\, A^{(i+1)} \cdots A^{(n)} \right)}$$

sviluppo con Laplace
secondo le colonne i .

Esempio:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_3 = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 + R_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}} \left| \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right)$$

3 Pivot $\Rightarrow$ rg 3 $\Rightarrow$ invertibile

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 \\ 3x_2 + 3x_3 = 1 \\ 5x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{1}{3} \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} s_1 = 1 \\ s_2 = 1/3 \\ s_3 = 0 \end{cases}$$

Con Formula di Cramer:

$$\det A = \det \tilde{A} = 1 \cdot 3 \cdot 5 = 15$$

$$(b \; A^{(2)} \; A^{(3)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\det (b \; A^{(2)} \; A^{(3)}) = 15$$

$$\Rightarrow s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}, \quad s_1 = \frac{15}{15} = \frac{\det (b \; A^{(2)} \; A^{(3)})}{\det A}$$

$$= 1$$

Cons. $\det (A^{(1)} \; b \; A^{(3)})$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} = 5$$

Cramer: $s_2 = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ ok

Cons. $\det (A^{(1)} \; A^{(2)} \; b)$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$s_3 = \frac{0}{15} = 0$$