Lezione 4 novembre

lunedì 4 novembre 2019 11:17

PRODOTTO SCALARE STANDARD in $\mathbb{R}^n$

Def: Siano $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Il PRODOTTO SCALARE

$$\langle v, w \rangle := a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \cdots + a_n \cdot b_n \in \mathbb{R}$$

altre notazioni: $v \cdot w$

oss. possiamo scrivere:

$$\langle v, w \rangle = {}^t v \cdot w$$
$$= \underset{1 \times n}{(a_1\ a_2\ \cdots\ a_n)} \cdot \underset{n \times 1}{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}$$

oss. Prodotto scalare è una funzione:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\longrightarrow \langle v, w \rangle = {}^t v \cdot w \end{aligned}$$

PROPRIETÀ del prodotto scalare standard:

① BILINEARITÀ:

$$\langle v_1 + v_2, w \rangle = \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle$$
$$\langle v, w_1 + w_2 \rangle = \langle v, w_1 \rangle + \langle v, w_2 \rangle$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{R}: \langle \alpha v, w \rangle = \alpha \cdot \langle v, w \rangle = \langle v\ \alpha \cdot w \rangle$$

② SIMMETRIA:

$$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$$
$$= a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \qquad = b_1 a_1 + \cdots + b_n a_n$$

③ DEFINITO POSITIVO:

$$\forall v \in \mathbb{R}^n: \langle v, v \rangle \geq 0 \quad \text{e si ha} \quad \langle v, v \rangle = 0$$
$$= a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \qquad \Updownarrow$$
$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dim: esercizio

Def.: Dato $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, la sua NORMA

$$\|v\| := \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

PROPRIETÀ DELLA NORMA:

ⓐ $\|v\| \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$;

inoltre $\|v\| = 0 \iff v = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

ⓑ $\|c \cdot v\| = |c| \cdot \|v\|$

ⓒ DISEGUAGLIANZA TRIANGOLARE:

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

TEOREMA: Cons. due vettori $v, w \in \mathbb{R}^2$ oppure in $\mathbb{R}^3$, non nulli, e identifichiamo v e w con 2 vettori applicati nell'origine del piano fisico o dello spazio fisico.

Parentesi: richiamo:

Nel piano o nello spazio fissiamo un sistema di riferimento cartesiano: un'origine O, due vettori $\vec{i}$ e $\vec{j}$, ortogonali tra loro; rispettivamente O, 3 vettori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ a due a due ortogonali se siamo nello spazio

Se $\vec{v}$ vettore applicato in O, si ha che $\vec{v}$ si scrive in modo unico come combinazione lineare di $\vec{i}$ e $\vec{j}$, rispettivamente di $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$:

$$\vec{v} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j}, \quad \text{ovvero}$$

$$\vec{v} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$$

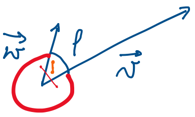
Quindi a $\vec{v}$ si associa in modo unico un elemento $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, rispettivamente un elemento $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ se siamo nello spazio, e viceversa. Fine parentesi

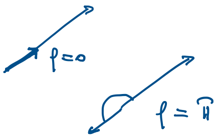
Allora si ha:

$$\langle v, w \rangle = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos\varphi$$

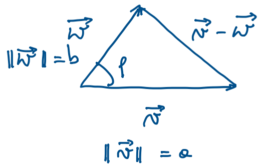
dove $\varphi \in [0, \pi]$ è l'angolo CONVESSO tra i vettori applicati in O corrispondenti

$v \neq 0, \quad w \neq 0$





Dim. Se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ non sono proporzionali, considero il triangolo di lati $a = \|\vec{v}\|$, $b = \|\vec{w}\|$, $c = \|\vec{v} - \vec{w}\|$



$\|\vec{v} - \vec{w}\| = c$

Teorema del Cos: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi$

è una generalizzazione del Teorema di Pitagora

Applicando il Teorema del Coseno al nostro caso otteniamo:

$$\|\vec{v} - \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - 2\,\|v\|\,\|w\|\cos\varphi$$

Calcoliamo ora $\|\vec{v} - \vec{w}\|^2$ usando le proprietà del prodotto scalare:

dalla definizione di norma si ottiene:

$$\|\vec{v}-\vec{w}\|^2 = \langle v-w, v-w\rangle$$

| bilinearità ①

$$= \langle v-w, v\rangle + \langle v-w, -w\rangle$$

$$= \langle v, v\rangle + \langle -w, v\rangle + \langle v, -w\rangle + \langle -w, -w\rangle$$

Ora, siccome $-w = (-1)\cdot w$, abbiamo: $\langle -w, v\rangle = \langle (-1)\cdot w, v\rangle = (-1)\cdot\langle w, v\rangle = -\langle w, v\rangle$

$\langle v, -w\rangle = \langle v, (-1)\cdot w\rangle = (-1)\langle v, w\rangle = -\langle v, w\rangle$

$\langle -w, -w\rangle = \langle (-1)\cdot w, (-1)\cdot w\rangle = (-1)\cdot(-1)\cdot\langle w, w\rangle = \langle w, w\rangle$

Quindi: $\|\vec{v}-\vec{w}\|^2 = \langle v, v\rangle - \langle w, v\rangle - \langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle$

| ② simmetria

$$= \langle v, v\rangle - 2\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle$$

$$= \cancel{\|\vec{v}\|^2} + \cancel{\|\vec{w}\|^2} - 2\langle v, w\rangle = \cancel{\|\vec{v}\|^2} + \cancel{\|\vec{w}\|^2} - 2\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|\cdot\cos\varphi$$

$$\Longrightarrow \langle v, w\rangle = \|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|\cdot\cos\varphi$$

OSS.: La formula vale anche per $\varphi = 0$, opp. π

infatti: $\varphi = 0$: $\vec{w} = c\cdot\vec{v}$ $\quad c > 0$

$$\langle v, w\rangle = \langle v, c\cdot v\rangle = c\cdot\langle v, v\rangle = \boxed{c\cdot\|\vec{v}\|^2}$$

$$= \|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|\cdot\cos\varphi = \|\vec{v}\|\cdot c\cdot\|\vec{v}\|\cdot\underbrace{\cos 0}_{=1}$$

$$\|\vec{w}\|^2 = \langle cv, cv\rangle = c^2\cdot\langle v, v\rangle = c^2\cdot\|\vec{v}\|^2$$

$$\Downarrow$$

$$\|\vec{w}\| = c\cdot\|\vec{v}\| \qquad c > 0$$

Analog.: se $\varphi = \pi$, $\vec{w} = d\cdot\vec{v}$ $\quad d < 0$

ecc. ecc.

OSS. se $v = 0$ oppure $w = 0$, si ha

$\langle v, w\rangle = 0$

COROLLARIO DEL TEOREMA:

se $v \neq 0$, $w \neq 0$

si ha $\cos\varphi = \dfrac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\cdot\|\vec{w}\|}$ dipende da a_1, a_2, b_1, b_2

Det: v e w due vettori non nulli; si dicono PERPENDICOLARI se $\varphi = \pi/2$

v e w (non necessariamente non nulli) si dicono ORTOGONALI se

$$\langle v, w \rangle = 0.$$

oss. Perpendicolari $\Longrightarrow$ ortogonali

oss. Tutto vale anche per $\vec{v}$ e $\vec{w}$ dello spazio.

$$\langle v, w \rangle = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos\varphi.$$

e diamo le stesse def. di perpendic. e ortogonalità.

~~~ . ~~~ . ~~~

Divagazione: cons. una matrice del tipo:

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{2 colonne uguali}$$

$$\det \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & b_1 \\ b_2 & a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 & b_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad -''-$$

Esprimiamo il determinante della prima matrice usando la definizione di determinante (sviluppo di Laplace secondo la prima colonna):

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 \end{pmatrix} = \underset{(11)}{a_1} \cdot \det A_{11} + \underset{(21)}{a_2} (-\det A_{21}) + \underset{(31)}{a_3} \cdot \det A_{31}$$

$$= a_1 \cdot \det \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \left(-\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}\right) + a_3 \cdot \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$\Longrightarrow$ i due vettori sono ortogonali

Analog: $$\det \left(\begin{array}{c|cc|} b_1 & a_1 & b_1 \\ b_2 & a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 & b_3 \end{array} \right) = b_1 \cdot \det A_{11} + b_2 \cdot (-\det A_{21}) + b_3 \cdot \det A_{31} = 0$$

$\Longrightarrow$ anche

$$\left\langle \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \det A_{11} \\ -\det A_{21} \\ \det A_{31} \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$ quindi sono ortogonali

Def. Dati $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ e $w \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, il vettore

$$v \wedge w \quad (\text{opp. } v \times w) \quad := \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

PRODOTTO VETTORIALE o PRODOTTO ESTERNO

È una funzione

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

OSS.: Dai conti fatti, $v \wedge w$ è ortogonale sia a v che a w.

PROPRIETÀ del PRODOTTO VETTORIALE:

① $v \wedge w = - w \wedge v$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \\ b_3 & a_3 \end{pmatrix}$$

Infatti scambiando due colonne, vengono scambiate anche le colonne di tutti i minori 2×2, e i loro determinanti cambiano segno.

② $v \wedge w = 0 \iff v$ e w sono linearmente dipendenti

Infatti: $v \wedge w = 0 \iff$ i determinanti dei tre minori 2×2 della matrice $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$ sono nulli

$$\iff \underbrace{\operatorname{rg} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}}_{= \max\{\text{ordini minori quadrati con } \det \neq 0\}} \leq 1 \iff \text{le colonne sono linearmente dipendenti}$$

③ $(\alpha v) \wedge w = v \wedge (\alpha w) = \alpha (v \wedge w)$: facile verifica

④ $v \wedge (w + u) = v \wedge w + v \wedge u$: facile verifica.
~~~