Esercizi di Geometria - Ingegneria Industriale e Navale 2019/2020 - settimo foglio

November 5, 2019

1. Si calcolino i determinanti delle seguenti matrici, usando la regola di Sarrus e poi usando una formula di Laplace a piacere:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 7 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \pi & 2 & 0 \\ 0 & -\pi & 1 \\ 2\pi & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2.2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2.3 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Usando la formula dei cofattori si determini l'inversa delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Usando la formula di Cramer si risolvino i seguenti sistemi lineari:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 & = 2 \\ x_1 + 3x_2 & = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 & = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 & = -1 \\ x_1 - x_2 & = 1 \end{cases}$$

4. Usando la formula di Cramer e una calcolatrice si risolva il seguente problema del Page Rank:

$$\begin{cases} x_1 & = 0.85\left(\frac{x_2}{2}\right) + \frac{0.15}{4} \\ x_2 & = 0.85\left(\frac{x_1}{3} + \frac{x_4}{2}\right) + \frac{0.15}{4} \\ x_3 & = 0.85\left(\frac{x_1}{3} + \frac{x_4}{2}\right) + \frac{0.15}{4} \\ x_4 & = 0.85\left(\frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} + x_3\right) + \frac{0.15}{4} \end{cases}$$

5. • Siano $x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ degli scalari reali. Usando l'algoritmo di Gauss si verifichi che il determinante della seguente matrice, detto *determinante di Vandermonde*:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 \end{pmatrix},$$

è uguale a

$$(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1).$$

• Siano $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ degli scalari reali. Si dimostri che in generale il *determinante di Vandermonde* è uguale a:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

Suggerimento: Si faccia la dimostrazione per induzione su n. Invece di ridurre la matrice a scala, si sostituisca ad ogni riga R_k, eccetto la prima, la riga $R_k - x_0 R_{k-1}$, si usi lo sviluppo di Laplace del determinante secondo la prima colonna, l'omogeneità del determinante e l'ipotesi induttiva.

6. • Si considerino le seguenti coppie di numeri reali:

$$P_0 = (1,1), \ P_1 = (2,1), \ P_2 = (-1,2).$$

Usando un opportuno sistema lineare si dimostri che esiste un unico polinomio $f(x)$ di grado ≤ 2 tale che valgano

$$f(1) = 1, \ f(2) = 1, \ f(-1) = 2.$$

• In generale, considerando un opportuno sistema lineare e il Teorema di Cramer, si dimostri che date $n+1$ coppie di numeri reali

$$(x_0, y_0), \ (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$$

con $x_i \neq x_j$ per ogni $i \neq j$, esiste un unico polinomio $f(x)$ di grado $\le n$ tale che si abbia

$$f(x_0) = y_0, \ f(x_1) = y_1, \dots, \ f(x_n) = y_n.$$

Questo problema si dice **problema di interpolazione polinomiale**.