CORSO DI GEOMETRIA
SIMULAZIONE PROVA DI ESONERO 5 NOVEMBRE 2019
PROF. VALENTINA BEORCHIA

Cognome	Nome	Corso di Laurea

(1) (a) Si consideri la matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e si consideri il vettore

$$b_a = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

con $a \in \mathbb{R}$ parametro reale. Si dica per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$, il sistema lineare

$$AX = b_a$$

è compatibile.

(b) Per i valori di a, per cui il sistema è compatibile, si determini l'insieme delle soluzioni del sistema.

(c) Si consideri il sistema lineare omogeneo $A \cdot X = 0$ e sia $W \subseteq \mathbb{R}^3$ il sottospazio vettoriale delle sue soluzioni. Si determini la dimensione $\dim W$ e una sua base.

(d) Sia L il sottospazio generato dalle colonne di A:

$$L = \operatorname{Span}(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}) \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Si determini la sua dimensione e una sua base.

(e) Si trovi una base di

$$W + L \subseteq \mathbb{R}^3.$$

(f) Usando la formula di Grassmann si calcoli la dimensione di $W \cap L$ e si dica se W e L sono in somma diretta.

(2) Si consideri la matrice (matrice di una riflessione piana nello spazio)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Si dica se M è invertibile oppure no, motivando la risposta, e in caso affermativo si calcoli la sua matrice inversa con un metodo a piacere (si supponga per semplicità $\cos\alpha \neq 0$).