Lezione 17 ottobre 2019

lunedì 4 novembre 2019 14:59

Proposizione: Sia V uno spazio vettoriale di dimensione

$$\dim V = n.$$

Allora:

① Se $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti $\Rightarrow$ $v_1, \dots, v_n$ sono anche dei generatori, quindi $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base

② Se $v_1, \dots, v_n$ sono dei generatori $\Rightarrow$ $v_1, \dots, v_n$ sono anche linearmente indipendenti quindi $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base

Dim.: ① Se $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente IND., per il Teorema di Completamento si posso estendere ad una base: $\mathcal{B} \supseteq \{v_1, \dots, v_n\}$

Per il Teorema sulla cardinalità delle basi, siccome $\dim V = n$ per ipotesi, abbiamo

$$\# \mathcal{B} = n \quad ; \quad \text{essendo anche } \# \{v_1, \dots, v_n\} = n$$

$$\Rightarrow \mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}, \text{ quindi sono anche generatori}$$

② Supponiamo ora che $v_1, \dots, v_n$ siano generatori; per il Teorema di Estrazione ne possiamo estrarre una base:

$$\mathcal{B} \subseteq \{v_1, \dots, v_n\}$$

D'altra parte $\quad \# \mathcal{B} = n = \dim V \quad , \quad \# \{v_1, \dots, v_n\} = n$

$$\Rightarrow \mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}.$$

* * *

Vediamo ora cosa si può dire della dimensione di un sottospazio vettoriale W di uno spazio vettoriale V di dimensione finita: $\dim V = n$.

PROPOSIZIONE: Sia V uno spazio vettoriale di $\dim V = n$ e sia $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale non banale ($W \neq \{0\}$).

Allora si ha:

① $\dim W \leq \dim V$

② $\dim W = \dim V \Leftrightarrow W = V$.

Dim. ① Osservo che siccome V ammette un numero finito di generatori, anche W ammette un numero finito di generatori.

Infatti, se per assurdo non fosse così, potremmo costruire una successione di vettori di W nel modo seguente:

sia $w_1 \in W$, $w_1 \neq 0$;
poi sia $w_2 \in W$, tale che $w_2 \notin \mathrm{Span}(w_1)$;
sia $w_3 \in W$, tale che $w_3 \notin \mathrm{Span}(w_1, w_2)$;
$\vdots$
sia $w_k \in W$, tale che $w_k \notin \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_{k-1})$
$\vdots$

la scelta può continuare all'infinito, perché stiamo supponendo che W non sia finitamente generato.

Osserviamo che per costruzione, $\forall\, k \geq 1$, i vettori $w_1, \dots, w_k$ sono linearmente indipendenti in W

In particolare, se $k = n+1 = \dim V + 1$, trovo $w_1, \dots, w_{n+1}$ linearmente indipendenti come vettori di W; ma allora lo sono anche come vettori di V, perché il campo degli scalari per W e V è lo stesso, cioè $\mathbb{K}$.

Avrei trovato quindi $n+1 > n = \dim V$ vettori lin. IND. di V, ma questo è un assurdo perché contraddice il Lemma di Steinitz.

② Se $W = V$, vale chiaramente $\dim W = \dim V$.

Viceversa, supponiamo $\dim W = \dim V = n$ e supponiamo per assurdo $W \neq V$.

Fisso una base $\mathcal{C}$ di W: $\{w_1, \dots, w_n\} = \mathcal{C}$ ha n vettori perché $n = \dim W$.

In particolare sono dei generatori per W:

$$W = \text{Span}(w_1, \dots, w_n) \underset{\neq}{\subset} V$$

$\Rightarrow \{w_1, \dots, w_n\}$ NON è una base di V.

Siccome $w_1, \dots, w_n$ sono linearmente indipendenti in $W \Rightarrow$ sono lin. ind. anche in V

$\Rightarrow$ per il Teorema del Completamento,

$\exists\, \mathcal{B}$ base di V t.c. $\mathcal{B} \underset{\neq}{\supset} \mathcal{C}$

$\Rightarrow$ in $\mathcal{B}$ c'è almeno un vettore in più

$\Rightarrow$ si avrebbe $n = \dim W < \dim V$:

ASSURDO perché per ipotesi $\dim W = \dim V$.

Def.: Se $\dim W = 1$, W si dice RETTA VETTORIALE

Se $\dim W = 2$, W si dice PIANO VETTORIALE

Esempio: sia $V = M_2(\mathbb{R})$ spazio delle matrici reali 2×2

Ricordiamo che $\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$, perché una sua base è data, ad esempio, da

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Cos'è una retta vettoriale in $M_2(\mathbb{R})$? Un qualunque sottospazio vettoriale di dimensione 1.

Ad esempio: $W = \mathrm{Span}\left(\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{\text{base di } W}\right) = \left\{c\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \mid c\in\mathbb{R}\right\}$

Esempio di un piano vettoriale in $M_2(\mathbb{R})$:

$$W' = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \left\{c_1\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \mid c_1, c_2\in\mathbb{R}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{pmatrix}c_1 & c_2\\ c_2 & c_1\end{pmatrix} \mid c_1, c_2 \in\mathbb{R}\right\}$$

Possiamo considerare anche il sottospazio

$$\mathrm{Sym}(2,\mathbb{R}) \subseteq M_2(\mathbb{R})$$

delle matrici simmetriche

$$\mathrm{Sym}(2,\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix}c_1 & c_2\\ c_2 & c_3\end{pmatrix} \mid c_1, c_2, c_3\in\mathbb{R}\right\}$$

$$= \mathrm{Span}\left(\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{\text{base di } \mathrm{Sym}(2,\mathbb{R})}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \dim \mathrm{Sym}(2,\mathbb{R}) = 3.$$

Oss. Abbiamo dato la def. di sottospazio vettoriale $W \subseteq V$ e abbiamo visto che gli insiemi del tipo $\mathrm{Span}(v_1, .., v_k)$ sono esempi di sottospazi vettoriali.

Alla luce della Proposizione di oggi: $W \subseteq V$ sottosp. $\Rightarrow \dim W \leq \dim V$ abbiamo che se V ha $\dim V = n \Rightarrow$ tutti i suoi sottospazi vettoriali sono del tipo $W = \mathrm{Span}(v_1, .., v_k)$ per opportuni $v_1, .., v_k$.