Lezione 30 ottobre

mercoledì 30 ottobre 2019 11:24

TEOREMA:

Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. Allora

$$\operatorname{rg}(A) < n \iff \det A = 0$$

Equivalentemente:

$$\operatorname{rg}(A) = n \iff \det A \neq 0.$$

Dim. Teorema:

Abbiamo visto che $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(\tilde{A})$
con $\tilde{A}$ a scala, ottenuta OE1, OE3.

$$\operatorname{rg}(A) < n \iff \underset{= r = \#\text{ righe non nulle}}{\operatorname{rg}(\tilde{A})} < n \iff \tilde{A} \text{ ha almeno una riga nulla.}$$

per $\tilde{A}$ visto: $\det \tilde{A} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cdots a_{nn} = 0$

$$= (-1)^{\sigma} \det A \implies \det A = 0$$

Viceversa: supp. $\det A = 0 \implies \det \tilde{A} = 0$

se per assurdo $\tilde{A}$ avesse rango massimo n
$\implies \tilde{A}$ ha n righe non nulle $\implies$ i pivot
di $\tilde{A}$ sono $\underset{\neq 0}{\tilde{a}_{11}}, \underset{\neq 0}{\tilde{a}_{22}}, \ldots, \underset{\neq 0}{\tilde{a}_{nn}}$

$$\implies \det \tilde{A} = \tilde{a}_{11} \cdot \tilde{a}_{22} \cdots \tilde{a}_{nn} \neq 0 \quad \text{assurdo.}$$

Quindi: $\operatorname{rg} \tilde{A} < n$, $\operatorname{rg} \tilde{A} = \operatorname{rg} A$
$\implies \operatorname{rg} A < n.$

Domanda: con l'uso del det, posso dire quanto vale $\operatorname{rg} A$?

TEOREMA: Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$.
Allora vale:

$$\operatorname{rg} A = \max \{ \operatorname{rg} B : B \text{ è una sottomatrice di } A \}$$

B sottomatrice se è ottenuta da A

cancellando alcune righe e alcune colonne

e inoltre :

$$\text{rg}\, A = \max\{\text{rg}\, B : B \text{ sottomatrice quadrata}\}$$

$$= \max\{\text{ordine } B : B \text{ sottomatrice quadrata di rango massimo, cioè t.c. } \det B \neq 0\}$$

Esempio :

B : $\det B = 0\cdot 5 - 2\cdot 3 = -6 \neq 0$

$$\underset{3\times 4}{A} = \left(\begin{array}{cc|cc|} \cline{3-4} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ \cline{3-4} 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right), \text{ vedo facilmente}$$

$\text{rg}\, A = 2$

Possibili sottomatrici quadrate : $p\times p$, $p \leq 3$ $(p \leq \min\{m,n\})$

3×3 : si ottengono togliendo 1 colonna

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio : calcolare 4 det e verificare $= 0$.

2×2 : si ottengono togliendo 1 riga e 2 colonne

ad es. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, ... alcune hanno $\det = 0$, ma c'è

almeno una 2×2 con $\det \neq 0$

ad es. $\det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \neq 0$ (anche $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \neq 0$ ...)

$$2 = \max\{\text{ordini } B : B \text{ quadrata}, \det B \neq 0\}$$

OSS. comunque scelgo una sottomatrice B 3×3, essa sarà costituita da 3 delle 4 colonne, e siccome $\text{rg}\, A = 2$, queste 3 colonne sono sempre linearmente dipendenti $\Rightarrow \text{rg}\, B < 3 \Rightarrow \det B = 0$.

COROLLARIO : del Primo Teorema :

$A \in M_n(K)$ è invertibile $\iff$ $\det A \neq 0$

Dim. Abbiamo visto A è invertibile $\iff$ $\operatorname{rg} A = n$

oggi: $\operatorname{rg} A = n \iff \det A \neq 0$

* * *

TEOREMA - FORMULE DI LAPLACE :

Ricordo la def. di det :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+\boxed{1}} a_{i\boxed{1}} \det A_{i\boxed{1}}$$

SVILUPPO DI LAPLACE PER COLONNE

sia $j \in \{1, \dots, n\}$ indice di colonna qualunque

Allora:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+\boxed{j}} a_{i\boxed{j}} \det A_{i\boxed{j}}$$

SVILUPPO DI LAPLACE PER RIGHE

sia $k \in \{1, \dots, n\}$ indice di riga qualunque

Allora:

$$\det A = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{k+p} a_{kp} \cdot \det A_{kp}$$

Dim. Si verifica che le espressioni scritte determinano delle funzioni $M_n(K) \longrightarrow K$ che verificano (D1), (D2), (D3).

Per il Teorema di Unicità del Determinante, queste funzioni coincidono con det.

Esempio :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

det risp. 1ª colonna:

$$\det A = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det A_{11} + (-1)^{1+2} \cdot 0 \cdot \det A_{21}$$

$$+ (-1)^{1+3} \cdot 2 \cdot \det A_{31}$$

$$= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-4) + 2 \cdot (-8) = \boxed{-20}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, sviluppo risp. 2ª colonna:

$j=2$

$$\det A = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det A_{ij}$$

$$= (-1)^{1+2} \overset{=0}{\boxed{a_{12}}} \det A_{12} + \underline{(-1)^{2+2} a_{22} \det A_{22}}$$

$$+ (-1)^{3+2} \underset{=0}{\boxed{a_{32}}} \det A_{32}$$

$$= 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 4 \cdot (-5) = \boxed{-20}$$

Esercizio: calcolare con sviluppo rispetto 3ª riga.

COROLLARIO delle FORMULE DI LAPLACE

$A \in M_n(\mathbb{K})$; vale

$$\det A = \det {}^t A$$

Dim. Per induzione su n :

$n=1$, $A = (a_{11})$, ${}^t A = (a_{11}) = A$

$\Rightarrow \det A = \det {}^t A$ ok.

$$\det\left({}^tA\right) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \underbrace{a_{1i}}_{\substack{\text{elemento } i,1 \\ \text{di } {}^tA}} \cdot \det\left({}^tA\right)_{i1}$$

osservo $\left({}^tA\right)_{i1} = A_{1i}$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i} a_{1i} \cdot \det A_{1i}$$

= formula per $\det A$ svolto rispetto alla prima riga.

* * *

TEOREMA DI BINET:

Siano $\underset{n\times n}{A}, \underset{n\times n}{B} \in M_n(K)$; allora $A\cdot B \in M_n(K)$

Allora

$$\det(A\cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Dim. OMESSA

COROLLARIO:

Sia $A \in M_n(K)$ invertibile $(\Rightarrow \det A \neq 0)$

Allora

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det A} = (\det A)^{-1}$$

Dim. Ricordo che si ha

$$A \cdot A^{-1} = \mathbb{I}_n$$

$$\Rightarrow \quad \det(A \cdot A^{-1}) = \det \mathbb{I}_n$$

BINET:

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \underbrace{\det A}_{\neq 0} \cdot \det(A^{-1}) = 1$$

$$\Rightarrow \quad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \det A = 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 3 = \boxed{-8}$$

A^{-1}

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{8}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - 3R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/4 & 3/8 \\ 0 & 1 & 1/4 & -1/8 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1/4 & 3/8 \\ 1/4 & -1/8 \end{pmatrix}}_{= A^{-1}}$$

$$\det A^{-1} = \det \begin{pmatrix} 1/4 & 3/8 \\ 1/4 & -1/8 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) - \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{4}{8}\right) = \boxed{-\frac{1}{8}} = \frac{1}{\det A} \quad \text{ok}$$