Lezione 21 ottobre 2019

lunedì 21 ottobre 2019 14:42

Lemma: Sia V spazio vettoriale, e siano U e W sottospazi vettoriali di V.

Se $u_1, \dots, u_p$ sono dei generatori di U

e $w_1, \dots, w_q$ sono dei generatori di W

allora: $u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_q$ sono dei generatori del sottospazio $U + W$.

Dim.: Dobbiamo dimostrare che ogni elemento di $U+W$ si può scrivere come combinazione lineare di $u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_q$.

Consideriamo quindi un generico vettore $z \in U + W$; per definizione di sottospazio somma, z è del tipo:

$$\textcircled{*} \quad z = u + w \quad , \text{ con } u \in U, \ w \in W.$$

Siccome $u_1, \dots, u_s$ sono generatori di U, si ha

$$u = a_1 u_1 + \dots + a_p u_p$$

per opportuni coefficienti $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{K}$, e siccome $w_1, \dots, w_q$ sono dei generatori per W, si ha

$$w = b_1 w_1 + \dots + b_q w_q.$$

Quindi da $\textcircled{*}$ otteniamo

$$z = a_1 u_1 + \dots + a_p u_p + b_1 w_1 + \dots + b_q w_q,$$

che dimostra la tesi.

TEOREMA: FORMULA DI GRASSMANN

Sia V spazio vettoriale di dimensione finita, e siano $W \subseteq V$, $U \subseteq V$ due sottospazi vettoriali. Allora vale:

$$\dim W + \dim U = \dim (W + U) + \dim (W \cap U).$$

Dim.: Sia $\mathcal{B}_{W \cap U} = \{ y_1, \dots, y_r \}$ una base del sottospazio $W \cap U$: $\dim W \cap U = r$.

Siccome $W \cap U \subseteq W$ è sottospazio anche di $W \Longrightarrow$ per il Teorema del Completamento possiamo trovare una base di W aggiungendo dei vettori:

$\mathcal{B}_W = \{y_1, \dots, y_r, w_1, \dots, w_k\}$ base di W : $\dim W = r + k$

Analogamente, $W \cap U \subseteq U$ è sottospazio $\Longrightarrow$ per il Teorema del Completamento trovo una base

$\mathcal{B}_U = \{y_1, \dots, y_r, u_1, \dots, u_s\}$ base di U: $\dim U = r + s$

Affermo ora che $\{y_1, \dots, y_r, w_1, \dots, w_k, u_1, \dots, u_s\}$ è una base di $W + U$.

Siccome $\mathcal{B}_W$ e $\mathcal{B}_U$ sono basi, e quindi in particolare insiemi di generatori per W e U, per il Lemma precedente, l'unione di due insiemi

$$\mathcal{B}_W \cup \mathcal{B}_U = \{y_1, \dots, y_r, w_1, \dots, w_k, u_1, \dots, u_s\}$$

è un insieme di generatori per $W + U$.

Basta dunque dimostrare che sono linearmente indipendenti.

Consideriamo una loro combinazione lineare che dia il vettore nullo:

$$\underbrace{c_1 y_1 + \dots + c_r y_r + d_1 w_1 + \dots + d_k w_k}_{=:\, w} + \underbrace{h_1 u_1 + \dots + h_s u_s}_{=:\, u} = 0 \qquad (**)$$

abbiamo $w \in W$ e $u \in U$

e vale $u = -w$; siccome W è sottospazio vettoriale, anche $-w \in W$ $\Longrightarrow u \in W$

$\Longrightarrow u \in W \cap U$

$\Longrightarrow$ u si può scrivere anche come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}_{W \cap U}$:

$$\left.\begin{aligned} u &= m_1 y_1 + \cdots + m_r y_r \\ &= h_1 u_1 + \cdots + h_s u_s \end{aligned}\right\} \Longrightarrow m_1 y_1 + \cdots + m_r y_r - h_1 u_1 - \cdots - h_s u_s = 0$$

Ma i vettori $y_1, \dots, y_r, u_1, \dots, u_s$ formano una base $\Longrightarrow$ sono linearmente indipendenti $\Longrightarrow m_1 = 0, \dots, m_r = 0, h_1 = 0, \dots h_s = 0.$

Quindi: la combinazione $\boxed{**}$ diventa:

$$c_1 y_1 + \cdots + c_r y_r + d_1 w_1 + \cdots + d_k w_k = 0$$

cioè una combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}_W$, che sono linearmente indipendenti

$$\Longrightarrow c_1 = 0, \dots, c_r = 0, d_1 = 0, \dots, d_k = 0.$$

Quindi $\{y_1, \dots, y_r, w_1, \dots, w_k, u_1, \dots, u_s\}$ è una base di $W + U$, da cui otteniamo

$$\begin{aligned} \dim(W+U) &= r + k + s \\ &= \dim W + \dim U - \dim(W \cap U). \end{aligned}$$

Q.E.D. (quod erat dimostrandum)

Conseguenze della Formula di Grassmann:

Siccome $W + U \subseteq V$ è sottospazio, si ha sempre

$$\dim(W+U) \leq \dim V = n$$

Quindi da Grassmann:

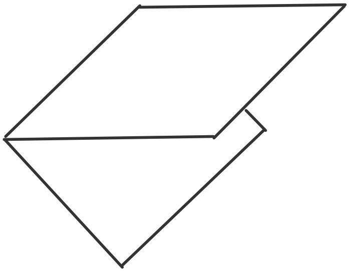
$$\dim(W \cap U) = \dim W + \dim U - \dim(W+U) \geq \dim W + \dim U - n$$

Esempio: Sia $V = \mathbb{R}^3$ e siano W e U due piani vettoriali di $\mathbb{R}^3$: $\dim W = 2$

$\dim U = 2$

Allora : $\dim(W \cap U) \geq \dim W + \dim U - 3 = 2 + 2 - 3 = 1$.

cioè : due piani vettoriali in $\mathbb{R}^3$ si INTERSECANO SEMPRE ALMENO LUNGO UNA RETTA VETTORIALE.



OSSERVAZIONE : Dalla Formula di Grassmann abbiamo anche che:

$$\dim(W + U) = \dim W + \dim U$$

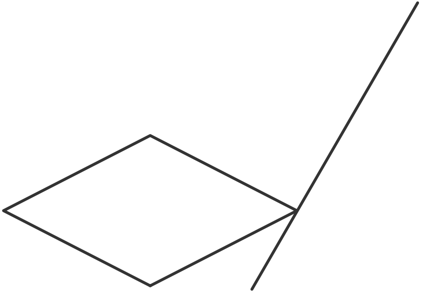
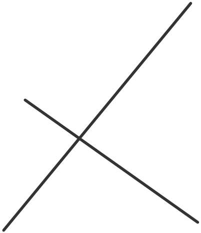
$$\Longleftrightarrow$$

$$\dim(W \cap U) = 0, \text{ cioè}$$

$$\Longleftrightarrow W \cap U = \{0\}.$$

Quando si verifica questa situazione, W e U si dicono IN SOMMA DIRETTA, e invece di

$W + U$ scriviamo

$W \oplus U$.