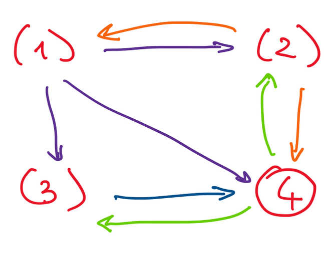
Esercitazione 1 ottobre

martedì 1 ottobre 2019 15:13

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad h_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i) \to (j) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

x_1, x_2, x_3, x_4 IMPORTANZE DI



$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{x_2}{2} \\ x_2 = \dfrac{x_1}{3} + \dfrac{x_4}{2} \\ x_3 = \dfrac{x_1}{3} + \dfrac{x_4}{2} \\ x_4 = \dfrac{x_1}{3} + \dfrac{x_2}{2} + x_3 \end{cases}$$

SISTEMA MODIFICATO:

$$\begin{cases} x_1 = 0.85 \left(\dfrac{x_2}{2}\right) + \dfrac{0.15}{4} \\ x_2 = 0.85 \left(\dfrac{x_1}{3} + \dfrac{x_4}{2}\right) + \dfrac{0.15}{4} \\ x_3 = 0.85 \left(\dfrac{x_1}{3} + \dfrac{x_4}{2}\right) + \dfrac{0.15}{4} \\ x_4 = 0.85 \left(\dfrac{x_1}{3} + \dfrac{x_2}{2} + x_3\right) + \dfrac{0.15}{4} \end{cases}$$

Riscrivendo in modo ordinato:

$$\begin{cases} x_1 - \dfrac{0.85}{2} x_2 = \dfrac{0.15}{4} \\ -\dfrac{0.85}{3} x_1 + x_2 - \dfrac{0.85}{2} x_4 = \dfrac{0.15}{4} \\ -\dfrac{0.85}{3} x_1 + x_3 - \dfrac{0.85}{2} x_4 = \dfrac{0.15}{4} \\ -\dfrac{0.85}{3} x_1 - \dfrac{0.85}{2} x_2 - 0.85\, x_3 + x_4 = \dfrac{0.15}{4} \end{cases}$$

MATRICE DEI COEFFICIENTI:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{0.85}{2} & 0 & 0 \\ -\dfrac{0.85}{3} & 1 & 0 & -\dfrac{0.85}{2} \\ -\dfrac{0.85}{3} & 0 & 1 & -\dfrac{0.85}{2} \\ -\dfrac{0.85}{3} & -\dfrac{0.85}{2} & -0.85 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \dfrac{0.15}{4} \\ \dfrac{0.15}{4} \\ \dfrac{0.15}{4} \\ \dfrac{0.15}{4} \end{pmatrix}$$

2. $N^k = O \implies N$ non invertibile

Per assurdo: supp. N invertibile e troveremo una contraddizione

N invertibile: $\exists\, N^{-1}$:

$$N \cdot N^{-1} = I_n$$

$$N^{k-1} \cdot (N \cdot N^{-1}) = N^{k-1} \cdot I_n$$

$$\underbrace{(N^{k-1} \cdot N)}_{= N^k = O} \cdot N^{-1} = N^{k-1}$$

$$O \cdot N^{-1} = N^{k-1}$$

$$\boxed{O = N^{k-1}}$$

$$N^{k-2} \cdot N \cdot N^{-1} = N^{k-2} \cdot I_n$$

$$N^{k-1} \cdot N^{-1} = N^{k-2}$$

$$O = N^{k-2}$$

Ripetendo questo procedimento $k-1$ volte, troviamo che

$$N^{k-(k-1)} = O$$

$$= N^1 = N = O$$

è un ASSURDO perché O non è invertibile

$O \cdot M = O \neq I_n$, mentre abbiamo supposto che N fosse invertibile.

3. $\boxed{A^k = I_n} \implies A$ è invertibile

Definizione (RICHIAMO): Una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ si dice INVERTIBILE se $\exists\, M \in M_n(\mathbb{K})$ tale che $\boxed{A \cdot M = M \cdot A = I_n.}$ (*)

$$\left.\begin{aligned} A \cdot (A^{k-1}) &= I_n \\ A^{k-1} \cdot A &= I_n \end{aligned}\right\} \text{(*) è verificata per } M = A^{k-1}$$

Ricordo che:

$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdots A}_{k \text{ volte}}$ e il prodotto riga per colonna è associativo.

$\implies A$ è invertibile e $A^{-1} = A^{k-1}$

4. Dimostrare che

$A = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ è unipotente: fatto alla lavagna $A^3 = I_n$

Oss: A si può scrivere nella forma $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

con $\alpha = \frac{2}{3}\pi$.

Esercizio:
- mostrare che $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \cos k\alpha & -\sin k\alpha \\ \sin k\alpha & \cos k\alpha \end{pmatrix}$
- trovare un $\alpha > 0$ tale che $\nexists\, k \geq 1$ tale che $k\alpha = n \cdot 2\pi$ per un $n \in \mathbb{N}$

5. Sia $D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix}$

per semplicità cons. il caso 3×3

$d_{11}, d_{22}, d_{33} \in \mathbb{R}$ arbitrari (eventualmente qualcuno $= 0$)

D è invertibile $\iff d_{11} \cdot d_{22} \cdot d_{33} \neq 0$

$\left(\overset{\text{def.}}{\iff} D \cdot M = M \cdot D = I_3\right)$

$$M = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & 0 & 0 \\ 0 & z_{22} & 0 \\ 0 & 0 & z_{33} \end{pmatrix}$$

M

$$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} d_{11} z_{11} & d_{11} z_{12} & d_{11} z_{13} \\ d_{22} z_{21} & d_{22} z_{22} & d_{22} z_{23} \\ d_{33} z_{31} & d_{33} z_{32} & d_{33} z_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\to \underbrace{d_{11} z_{11} = 1}_{\implies d_{11} \neq 0}$ $\quad \underbrace{d_{11} z_{12} = 0}_{\implies z_{12} = 0}$ $\quad \underbrace{d_{11} z_{13} = 0}_{\implies z_{13} = 0}$

$\underbrace{d_{22} z_{21} = 0}_{\implies z_{21} = 0}$ $\quad \underbrace{d_{22} z_{22} = 1}_{\implies d_{22} \neq 0}$ $\quad \underbrace{d_{22} z_{23} = 0}_{z_{23} = 0}$

$d_{33} z_{31} = 0$ $\quad d_{33} z_{32} = 0$ $\quad \underbrace{d_{33} z_{33} = 1}_{\implies d_{33} \neq 0}$

Quindi: D invertibile $\implies d_{11} \neq 0, d_{22} \neq 0, d_{33} \neq 0$

Viceversa: supp. $d_{11} \neq 0, d_{22} \neq 0, d_{33} \neq 0$

Se pongo $M := \begin{pmatrix} 1/d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1/d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1/d_{33} \end{pmatrix}$

si verifica facilmente che vale

$$D \cdot M = M \cdot D = I_3$$

quindi D è invertibile e si ha $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1/d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1/d_{33} \end{pmatrix}$

es. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$