Prodotto di matrici.

<u>Def</u>. prodotto <u>righe per colonne</u> di una matrice $m \times n$ per una matrice $n \times p$ è una matrice $m \times p$: precisamente

se $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, K)$ $\quad i = 1, \dots, m$

$B = (b_{jk}) \in M(n \times p, K)$ $\quad j = 1, \dots, n$, $\quad k = 1, \dots, p$

def. $C = AB = (c_{ik})$ ponendo

$$c_{ik} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \dots + a_{in} b_{nk} =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \, .$$

Abbiamo così un'applicazione

$$M(m \times n, K) \times M(n \times p, K) \longrightarrow M(m \times p, K)$$
$$(A, B) \longrightarrow C = AB$$

<u>Esempio</u> 1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad 3 \times 4$

$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad 4 \times 2$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}^{2} \; 4$$

$$3 \; \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}}_{4} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \searrow 3 \times 2$$

$c_{11} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1$

$c_{12} = 1(-2) + 2(-1) + (-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0$

$\vdots$

2. A $1 \times n$ $\quad A = (a_{11} - - a_{1n})$

B $n \times 1$ $\quad B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$

$$AB = (a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + - + a_{1n} b_{n1}) \quad 1 \times 1$$

è uno scalare

$$(a_{11} - - a_{1n}) \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = (c_{11})$$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} \\ (a_{11} - - a_{1n}) = (c_{11}) \end{array}$$

3. A $n \times 1$ $\quad AB$ è $n \times m$

B $1 \times m$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} (b_{11} - - b_{1m}) = \begin{pmatrix} a_{11} b_{11} & a_{11} b_{12} & - & a_{11} b_{1m} \\ a_{21} b_{11} & - & - & a_{21} b_{1m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} b_{11} & - & - & a_{n1} b_{1m} \end{pmatrix}$$

4. $$A E_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

e anche $E_3 A = A$

Più in generale $E_n = (\delta_{ij})_{i,j = 1,-,n}$ $\quad$ E_n è elemento neutro

A $n \times n$ $\Rightarrow A E_n = E_n A = A$

5. $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad | \quad$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = AB \quad \Bigg| \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = BA$$

$AB \neq BA$ <u>in generale</u>

Il prodotto di matrici non è commutativo.

6. $AX = b$ indica il sistema lineare

$$\underset{m \times n}{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}} \underset{n \times 1}{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} = \underset{m \times 1}{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}$$

7. $$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$ per la formula di addizione.

<u>Proprietà</u> del prodotto di matrici

Date A, B, A', B' con il numero appropriato di righe e colonne, si ha:

a) ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

b) $A(B+B') = AB + AB'$

$(A+A')B = AB + A'B$ prop. distributiva

c) $(AB)C = A(BC)$ prop. assoc.

d) $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$.

<u>Dim.</u> a)

$C = AB = (c_{ih})$ con $c_{ih} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jh}$

$C' = {}^t(AB) = (c'_{hi})$ con $c'_{hi} = c_{ih} = \sum a_{ij} \cdot b_{jh} =$

$= \sum \underbrace{b_{jh}}_{\text{riga h di } {}^tB} \underbrace{a_{ij}}_{\text{colonne i di } {}^tA} = {}^tB\,{}^tA.$

Applicazioni lineari

Def. V, W sp. vett. su K. Un'applicazione $f: V \longrightarrow W$ è detta lineare se

1) $f(v_1+v_2) = f(v_1)+f(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$

f conserva la somma o è compatibile con la somma

2) $f(\lambda v) = \lambda f(v), \quad \forall v \in V, \forall \lambda \in K$

f conserva il prodotto esterno.

Oss. f è lineare $\Leftrightarrow$ $f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) =$
$= \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in K, \forall v_1, v_2 \in V$.

Prop. Sia f lineare.

1) $f(0_V) = 0_W$
2) $f(-v) = -f(v)$.

Dim.

1) $f(0) = f(\underset{\in K}{0} \cdot \underset{\in V}{0}) = 0\, f(0) \underset{\text{per la 2)}}{=} 0$

2) $f(-v) = f((-1)(v)) = (-1) f(v) = -f(v)$.

Oss. Se $f(0) \neq 0 \Rightarrow f$ non è lineare.

un'appl. lin. è costante $\Leftrightarrow f(v) = 0 \ \forall v$: appl. lineare nulla.

Esempi

1) $f: \mathbb{R} \xrightarrow{\cdot a} \mathbb{R}$ def. da

$f(x) = ax$, con $a \in \mathbb{R}$ fissato.

$$f(\lambda x + \mu y) = a(\lambda x + \mu y) = \lambda(ax) + \mu(ay) =$$
$$= \lambda f(x) + \mu f(y).$$

2) $f(x) = 2x + 1$ non è lin. $\quad f(0) \neq 0$

3) $f(x) = x^2$ non è lin.

$$f(1+1) = f(2) = 4$$
$$f(1) + f(1) = 1 + 1 = 2$$
$$4 \neq 2$$

4) $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 \\ 4x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$ è lineare (verif.)

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$ prod. di matrici

5) $$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 1 \\ x_2 \\ 4x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$ <u>non è lineare</u>

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Def. Sia $A \in M(m \times n, K)$.

Def. $L(A): K^n \longrightarrow K^m$

$$L(A)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum a_{mj} x_j \end{pmatrix}$$

$L(A)$ è un' appl. lineare:

$$L(A)\left(\lambda\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\right)=$$

$$\overset{\text{def.}}{=} A\left(\lambda\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\right)=$$

$$\overset{\text{distr.}}{=} A\left(\lambda\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right)+A\left(\mu\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\right)=$$

$$\overset{\substack{\text{mop d)}\\ \text{del mod.}}}{=} \lambda A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}+\mu A\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=$$

$$\overset{\text{def.}}{=} \lambda L(A)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}+\mu L(A)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

L'Applicazione lineare L(A).

A matrice $m \times n$ a entrate in K
$L(A): K^n \longrightarrow K^m$ applicaz. lineare associata ad A

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rightarrow A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^m$$

$$\overset{\|}{x} \qquad\qquad \overset{\|}{Ax}$$

$L(A)(x) = Ax$ $\qquad x$ = vettore colonna

<u>Oss</u>. Sia $e_1, \ldots, e_n$ la base canonica di K^n.

$$L(A)(e_1) = Ae_1 = \underset{m \times n}{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}} \underset{n \times 1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = a^1$$

$L(A)(e_i) = a^i$

Le colonne di A sono i corrispondenti dei vettori della base canonica.

<u>Prop</u>. $f: V \longrightarrow W$ appl. lineare
Allora
(i) Se $V' \subset V$ è un sottosp. vettoriale, allora $f(V') \subset W$ è un sottosp. vett.
(ii) Se $W' \subset W$ è un sottosp. vett. allora $f^{-1}(W') \subset V$ è un sottosp.
Ossia l'immagine di un sottosp. è sottosp. e la controimm. " "
In particolare $f(V) = \mathrm{Im}\, f$ = l'immagine di V.

Dim.

(i) Siano $w_1, w_2 \in f(V')$: allora $w_1 = f(v_1)$, $w_2 = f(v_2)$ per opportuni $v_1, v_2 \in V'$

Siano $\lambda_1, \lambda_2 \in K$, considero

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) \overset{f \text{ conserva prod.}}{=}$$
$$= f(\lambda_1 v_1) + f(\lambda_2 v_2) \overset{f \text{ " somma}}{=}$$
$$= f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \in f(V).$$

Ma siccome V' è sottosp. e $v_1, v_2 \in V' \Rightarrow$
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in V'$ e dunque $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in f(V')$.

(ii) Siano $v_1, v_2 \in f^{-1}(W')$ ossia $f(v_1) \in W'$, $f(v_2) \in W'$.

Consid. $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$; devo verif. che $f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \in W'$.

Ma $f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) \in W'$, perché W' è sottospazio e dunque
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in f^{-1}(W')$.

Era stato visto negli esercizi che se V è un K-sp. vett. e X un insieme, allora
$\mathrm{Appl}(X, V) = \{ f : X \to V \}$ è un K-sp. vett.
definendo le operaz. punto per punto.

<u>Def.</u> V, W K-spazi vettoriali.
$\mathrm{Hom}(V, W) = \{ f : V \to W \mid f$ <u>lineare</u> $\}$
f lineare : sinonimo <u>omomorfismo</u>

$\mathrm{Hom}(V, W)$ è un K-sp. vettoriale.

Dim.
- f, g lineari $\Rightarrow f+g$ lineare
- f lineare, $\lambda \in K \Rightarrow \lambda f$ lineare
- 0 è lineare: appl. nulla
- altre prop. già verif. per $\mathrm{Appl}(V, W)$.

Oss. $\mathrm{Hom}(V, W) \subset \mathrm{Appl}(V, W)$ è un sottosp. vett.

In particolare $V^* \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Hom}(V, K)$: spazio vettoriale duale.

Terminologia

Sia $f: V \to W$ appl. lineare = omomorfismo
- epimorfismo = suriettiva
- monomorfismo = iniettivo
- isomorfismo = biettivo
- endomorfismo se $V = W$
- automorfismo se $V = W$ e f è isomorfismo

Queste def. estendono quelle di omomorfismo di gruppi.

Prop. Sia $f: V \to W$ un isomorfismo.
Allora $\exists\, f^{-1}: W \to V$ l'applicazione inversa.
Si ha che anche f^{-1} è lineare e dunque è un isom.

Dim. Poniamo $f^{-1} = g$ (per semplif. la scrittura).
Siano $w_1, w_2 \in W$, $\lambda_1, \lambda_2 \in K$.
Dobbiamo verif. che $g(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \lambda_1 g(w_1) + \lambda_2 g(w_2)$.

~~Poniamo~~ Esistono unici v_1 t.c. $w_1 = f(v_1)$ e $w_2 = f(v_2)$, e dunque $g(w_1) = v_1$ e $g(w_2) = v_2$.
Allora $g(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = g(\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)) \underset{f \text{ lin.}}{=}$

$$= g(f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)) \underset{g = f^{-1}}{=} \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 =$$

$$= \lambda_1 g(w_1) + \lambda_2 g(w_2). \blacksquare$$

Nucleo di un'applicazione lineare

Sia $f : V \longrightarrow W$ lineare

Def. nucleo di f, denotato $\ker f$, il sottospazio di V

$$\ker f = f^{-1}(0) = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$$

controimmagine del sottospazio nullo.

Prop. f è iniettiva (monomorfismo) $\iff$ $\ker f = (0)$ sottosp. nullo

Dim. Se f è iniettiva $f^{-1}(0)$ è formato da un unico elemento, necessariamente nullo.
Vicev., se $\ker f = (0)$, siano $v_1, v_2 \in V$ t.c. $f(v_1) = f(v_2)$; allora $\underbrace{f(v_1) - f(v_2)}_{f(v_1 - v_2)} = 0$

$\Rightarrow v_1 - v_2 \in \ker f = (0) \Rightarrow v_1 - v_2 = 0. \blacksquare$

Teorema della dimensione

Sia $f: V \to W$ appl. lineare
dim V finita

Allora $\dim V = \dim(\ker f) + \dim \operatorname{Im} f$

($\operatorname{Im} f = f(V)$ è sottospazio di W)
dim $\operatorname{Im} f$ è detto rango di f : $rg(f)$)

Dim. Sia $u_1, \dots, u_k$ una base di $\ker f$.
Completo a una base di V: $u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n$.

Vogliamo dim che $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$ è una base di $f(V)$.

a) Sono un sistema di generatori:
sia $w = f(v) \in f(V)$. Allora
$v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k + \lambda_{k+1} v_{k+1} + \dots + \lambda_n v_n$

$$w = f(v) = f(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n v_n) =$$
$$= \lambda_1 \underset{0}{f(u_1)} + \dots + \lambda_k \underset{0}{f(u_k)} + \lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + \lambda_n f(v_n) =$$
$$= \lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + \lambda_n f(v_n)$$

b) Sono lin. indip.

Se $\mu_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + \mu_n f(v_n) = 0$
$$\parallel$$
$f(\mu_{k+1} v_{k+1} + \dots + \mu_n v_n) \Rightarrow$

$\mu_{k+1} v_{k+1} + \dots + \mu_n v_n \in \ker f$
$$\parallel$$
$\mu_1 u_1 + \dots + \mu_k u_k$ perché $u_1, \dots, u_k$ è base di $\ker f$ $\Rightarrow$

$\mu_1 u_1 + \dots + \mu_k u_k - \mu_{k+1} v_{k+1} - \dots - \mu_n v_n = 0$

$\Rightarrow \mu_1, \dots, \mu_k, \mu_{k+1}, \dots, \mu_n$ sono nulli.

■

La seguente prop. estende quanto visto nella parte a) della dim. precedente:

<u>Prop. A.</u> Siano $\{v_i\}_{i \in I}$ generatori di V e $f: V \longrightarrow W$ un'appl. lineare. Allora $\operatorname{Im} f$ è generata dai vettori $\{f(v_i)\}_{i \in I}$.

<u>Dim</u> Sia $v' \in \operatorname{Im} f$: allora $\exists\, v \in V$ t.c. $v' = f(v)$; v può essere scritto come combinazione lineare di una sottofam. finita dei $\{v_i\}$: $v = c_{i_1} v_{i_1} + \dots + c_{i_k} v_{i_k}$; allora

$$v' = f(v) = f(c_{i_1} v_{i_1} + \dots + c_{i_k} v_{i_k}) \overset{f \text{ lineare}}{=}$$
$$= c_{i_1} f(v_{i_1}) + \dots + c_{i_k} f(v_{i_k})$$

e dunque appartiene al sottospazio generato dai vettori $f(v_i)$, $i \in I$.

■

Conseguenze del teorema della dimensione.

1) Sia $f: V \longrightarrow W$ applicazione lineare, con $\dim V = \dim W$ finita.

Allora: f è iniettiva $\Longleftrightarrow$ f è suriettiva $\Longleftrightarrow$ f è biettiva.

Dim. $\dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$. (*)

Ma: f è iniettiva $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ $\Longleftrightarrow$ $\dim \operatorname{Ker} f = 0$.

f è suriettiva $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{Im} f = W$ $\Longleftrightarrow$ $\dim \operatorname{Im} f = \dim W \underset{\text{ipotesi}}{=} \dim V$.

Da ciò segue subito la tesi, applicando la (*).

2) V sp. vett. di dim finita, W sottosp. vettoriale di V.

Consideriamo $\pi: V \longrightarrow V/W$ la suriezione canonica t.c. $v \longrightarrow [v]$.

π risulta lineare perché le operazioni in V/W sono indotte da quelle di V.

Inoltre $\operatorname{Ker} \pi = W$. Dunque il teorema della dimensione ci dà:

$$\dim V/W = \dim \operatorname{Im} \pi = \dim V - \dim W.$$

3) A matrice $m \times n$ a coeff. in K

Allora il rango per righe e il rango per colonne di A coincidono. Infatti:

consideriamo $L(A): K^n \longrightarrow K^m$. Si ha

(*) $\dim K^n = n = \dim \operatorname{Ker} L(A) + \dim \operatorname{Im}(L(A))$.

Ma: $\operatorname{Ker} L(A) = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \;\middle|\; Ax = 0 \right\} = W$: spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato ad A.

Inoltre $\operatorname{Im} L(A)$ è generato dalle immagini dei vettori della base canonica (per la Prop. A):

$L(A)(e_1) = Ae_1 = a^1$, primo colonna di A,

$\vdots$

$L(A)(e_n) = Ae_n = a^n$, n-esima colonna di A.

Quindi $\operatorname{Im} L(A)$ è lo spazio delle colonne di A, e $\dim \operatorname{Im} L(A)$ è il rango per colonne di A. Allora la (*) dice che il rango per colonne di A è $n - \dim W$.

D'altra parte abbiamo visto che $n - \dim W$ è uguale al rango per righe di A. Quindi i due campi sono uguali.

Teorema di determinazione di un'applicazione lineare.

V, W K-spazi vettoriali.

Sia $B = (v_1, \dots, v_n)$ una base di V, e siano $w_1, \dots, w_n \in W$ n vettori qualunque di W.

Allora esiste ed è unica un'applicazione lineare $f : V \longrightarrow W$ tale che $f(v_1) = w_1, \dots, f(v_n) = w_n$.

Dim.

Unicità: supp. che f esista; vediamo come opera sui vettori di V. Sia $v \in V$: allora c'è una sola espressione $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$; $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono le coordinate di v rispetto a B: univocamente determinate da v.

Allora $f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) =$ f lineare

$= \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n$.

Dunque $f(v)$ è completamente determinata, e questo prova l'unicità.

Esistenza: prendiamo la precedente come definizione di v, ponendo

$f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n$.

f è ben definita; dobbiamo dimostrare che è lineare e che $f(v_i) = w_i \quad \forall i = 1, \dots, n$.

Sia $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$, $v' = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$, allora $v + v' = (\lambda_1 + \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda_n + \mu_n) v_n$.

Perciò $f(v) = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n$, $f(v') = \mu_1 w_1 + \dots + \mu_n w_n$ e $f(v+v') = (\lambda_1 + \mu_1) w_1 + \dots + (\lambda_n + \mu_n) w_n$; da cui $f(v+v') = f(v) + f(v')$.

Analogamente $\lambda v = \lambda(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = (\lambda\lambda_1) v_1 + \dots + (\lambda\lambda_n) v_n$, e perciò

$$f(\lambda v) = (\lambda\lambda_1) w_1 + \dots + (\lambda\lambda_n) w_n) = \lambda(\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n) =$$
$$= \lambda f(v).$$

Quindi f è lineare.

Consideriamo infine v_i:

$v_i = 0 \cdot v_1 + \dots + 0\, v_{i-1} + 1 \cdot v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \dots + 0\, v_n$:

ha coordinate $(0 \dots 0 \underset{\overset{\uparrow}{i}}{1} 0 \dots 0)$. Perciò

$f(v_i) = w_i$, come si voleva.

<u>Osservazione</u>

i) Il teorema vale anche se $\dim V = \infty$.

Se $\{v_i\}_{i \in I}$ è una base di V, e $\{w_i\}_{i \in I}$ sono vettori di W, $\exists!$ appl. lineare $f: V \longrightarrow W$ t.c. $f(v_i) = w_i \quad \forall i \in I$.

2) Sia $\dim V = \dim W = n$.

Siano $B = (v_1, \ldots, v_n)$ una base di V e

$B' = (w_1, \ldots, w_n)$ una base di W.

Allora $\exists!\ f: V \longrightarrow W$ tale che $f(v_i) = w_i \ \forall i$,

ed $\exists!\ g: W \longrightarrow V$ tale che $f(w_j) = v_j \ \forall j$,

LINEARI.

Allora consideriamo $\underbrace{V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} V}_{g \circ f}$:

$(g \circ f)(v_i) = g(f(v_i)) = g(w_i) = v_i \quad \forall i = 1, \ldots, n.$

Ossia $(g \circ f)(v_i) = id_V(v_i) \ \forall i$.

Inoltre $g \circ f$ è lineare (esercizio).

Allora $g \circ f$ e id_V sono 2 appl. lineari $V \to V$ che si comportano nello stesso modo sui vettori di una base. Dunque $g \circ f = id_V$.

Analogamente $f \circ g = id_W$.

Perciò f, g sono applicazioni lineari una inversa dell'altra: sono isomorfismi (biiettive).

3. Se $\dim V = \dim W = n$, allora V e W sono spazi vettoriali <u>isomorfi</u>, cioè esiste un isomorfismo $f: V \longrightarrow W$, si scrive $V \simeq W$.

Per costruire f, basta fissare due basi una di V e una di W e procedere come sopra.

In particolare, ogni K-spazio vettoriale V di $\dim n$ è isomorfo a K^n.

Se si fissa una base $\mathcal{B} = (v_1 \dots v_n)$ di V, e si prende la base canonica di K^n: $\mathcal{C} = (e_1 \dots e_n)$, si definisce $\kappa_{\mathcal{B}}: V \longrightarrow K^n$ l'unico isomorfismo t.c. $\kappa_{\mathcal{B}}(v_i) = e_i$.

Come opera $\kappa_{\mathcal{B}}$ su un generico vettore v?

Scrivo v come $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$, dove $a_1, \dots, a_n$ sono le sue coordinate rispetto a $\mathcal{B}$.

Allora $\kappa_{\mathcal{B}}(v) = \kappa_{\mathcal{B}}(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) =$

$= a_1 \kappa_{\mathcal{B}}(v_1) + \dots + a_n \kappa_{\mathcal{B}}(v_n) = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n =$

$= (a_1, \dots, a_n)$: $\kappa_{\mathcal{B}}$ associa a ogni vettore la n-upla delle sue coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$.