© 978-88-08-**52069**-2

Sia $P(t_1)$ il punto corrispondente al valore t_1 del parametro sulla prima retta e sia $Q(t_2)$ il punto corrispondente al valore t_2 del parametro sulla seconda retta. Ora, $P(t_1) = Q(t_2)$ è un punto che appartiene a entrambe le rette se e solo se (t_1, t_2) è una soluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} x_P + t_1 x(\mathbf{v}) = x_Q + t_2 x(\mathbf{w}) \\ y_P + t_1 y(\mathbf{v}) = y_Q + t_2 y(\mathbf{w}) \\ z_P + t_1 z(\mathbf{v}) = z_Q + t_2 z(\mathbf{w}) \end{cases}$$

che si può riscrivere nella forma equivalente

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \mathbf{u} \tag{6.14}$$

dove $\mathbf{A}$ è la matrice di tipo $(3,2)$ che ha per colonne i vettori $\mathbf{v}$ e $-\mathbf{w}$, mentre $\mathbf{u}$ è il vettore $\overrightarrow{QP}$.

Il rango di $\mathbf{A}$ è almeno 1 (perché la prima colonna $\mathbf{v}$ non è il vettore nullo) e al massimo 2 (perché $\mathbf{A}$ ha due colonne). Si verifica facilmente che il rango di $\mathbf{A}$ è 1 se e solo se $\mathbf{w}$ è un multiplo scalare di $\mathbf{v}$, cioè le due rette sono parallele.

D'altra parte, la matrice completa del sistema è una matrice di tipo $(3,3)$ e quindi ha al massimo rango 3. Posto $r = r(\mathbf{A})$ e $r' = r([\mathbf{A}|\mathbf{u}])$, tenuto conto che $r' = r$ oppure $r' = r+1$, i casi possibili sono:

a) $r' = 3$;

b) $r' = r = 2$;

c) $r' = 2$, $r = 1$;

d) $r' = r = 1$.

Nel caso a) il rango della matrice completa è $r' = 3$. Allora il rango di $\mathbf{A}$ dev'essere due perché $r' - r \leq 1$ e $r \leq 2$. Per Rouché-Capelli il sistema (6.14) non ha soluzione e quindi le due rette non hanno punti in comune. Siccome $r = 2$, le due rette non sono parallele. Quindi nel caso a) le due rette sono sghembe.

Nel caso b), per Rouché -Capelli le due rette hanno un unico punto in comune e sono quindi incidenti.

Nel caso c), le due rette sono parallele ($r = 1$) e distinte (non hanno punti in comune perché $r \neq r'$).

Nel caso d) le due rette coincidono (per Rouché-Capelli hanno una retta in comune!)

Questi risultati sono in accordo con quelli ottenuti nel capitolo 1. Il caso a) si verifica quando la matrice completa del sistema ha rango massimo e vedremo che questo succede se e solo se il suo *determinante* è diverso da zero. Ora il determinante è, a meno del segno, il prodotto misto $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$. Ritroviamo così che le due rette sono sghembe se e solo se $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \neq 0$.

Esercizi

1. Eseguire – ove possibile – i seguenti prodotti matrice-vettore:

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b) \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln 2 \\ \ln 3 \end{bmatrix}, \qquad c) \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

2 Ridurre a scala le seguenti matrici:

$$a)\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 10 \\ -1 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ -3 & -4 & -4 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & -3 & -6 \\ 3 & 10 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad c)\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -4 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 8 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 8 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

3 Stabilire il rango delle tre matrici dell'esercizio precedente.

4 Determinare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il rango della matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & 5 & -1 & 1 \\ 3 & 9 & 9 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

5 Utilizzando il MEG, risolvere – ove possibile – i seguenti sistemi lineari:

$$a)\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 - x_4 = 10 \\ 3x_1 + 10x_2 + 8x_3 + x_4 = 12 \end{cases}, \qquad b)\ \begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 7 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 10 \\ -x_1 + 6x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

commentando il risultato ottenuto alla luce del teorema di Rouché-Capelli.

6 Utilizzando il MEG, risolvere il sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 + x_6 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 - 2x_5 + 5x_6 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 12x_4 + 3x_5 + 16x_6 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 8x_4 + 2x_6 = 5 \end{cases}$$

commentando il risultato ottenuto alla luce del teorema di Rouché-Capelli.

7 Utilizzando il MEG, risolvere il sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 2x_6 + 2x_7 = 0 \\ -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 - 2x_5 - 3x_6 - 3x_7 = 0 \\ -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 - x_5 + x_6 + 3x_7 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 7x_3 + x_4 - 2x_5 - 4x_6 - 8x_7 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 6x_4 - 5x_5 - 8x_6 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 + 4x_5 + 10x_6 + 9x_7 = 0 \end{cases}$$

commentando il risultato ottenuto alla luce del teorema di Rouché-Capelli.

8 Determinare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x - y + \alpha z = -1 \\ \alpha x + 2z = -2 \\ y + z = -1 \end{cases}$$

Interpretare geometricamente i risultati ottenuti.

9 Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ i piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni

$$x + 3y - \alpha z = 4, \quad x + 8y + (\alpha - 1)z = 2 + 2\alpha, \quad 2x + \alpha y - 3z = 8$$

si intersecano in una retta?

10 Sia $\mathbf{A}$ una matrice di tipo (m, n). Mostrare che il sistema omogeneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ ha sempre almeno una soluzione: il vettore nullo $\mathbf{0}$. Mostrare anche che $r([\mathbf{A}|\mathbf{0}]) = r(\mathbf{A})$, coerentemente col teorema di Rouché-Capelli.

11 La linearità in $\mathbf{v}$ del prodotto $\mathbf{Av}$ è una versione matematica del *principio di sovrapposizione*: mostrare che se $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono soluzione, rispettivamente, dei sistemi $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_1$ e $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_2$, allora $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ è soluzione di $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$.

12 Sia $\mathbf{A}$ una matrice con due sole righe. Mostrare che, se $r(\mathbf{A}) < 2$, allora o la prima riga è nulla oppure la seconda è un multiplo scalare della prima.

13 Sia $\mathbf{B}$ una matrice con due sole colonne. Mostrare che, se $r(\mathbf{B}) < 2$, allora o la prima colonna è nulla oppure la seconda è un multiplo scalare della prima.

14 Sia $\mathbf{A}$ una matrice di tipo $(3, 3)$. Mostrare che $r(\mathbf{A}) < 3$ se e solo se le tre colonne di $\mathbf{A}$, come vettori di $\mathbb{R}^3$, sono linearmente dipendenti. Concludere che la matrice ha rango tre se e solo se il suo determinante è diverso da zero (il determinante della matrice è il prodotto misto delle sue tre colonne).

Suggerimento: usando la (5.4) mostrare che le tre colonne sono linearmente dipendenti se e solo se il sistema omogeneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ ammette una soluzione non nulla; per Rouché-Capelli questo succede se e solo se $r < n = 3$.

15 Sia $ax + by = c$ la generica equazione di una retta nel piano cartesiano. Si scriva il sistema lineare nelle incognite a, b, c ottenuto richiedendo che la retta passi per due punti A e B. Sia $\mathbf{A}$ la matrice 2×3 dei coefficienti di tale sistema. Si mostri che $r(\mathbf{A}) = 2$ se e solo se i due punti sono distinti. Dedurre usando Rouché-Capelli che esiste un unica retta in $\mathbb{R}^2$ che passa per due punti distinti.

16 Sia $ax + by + cz = d$ la generica equazione di un piano dello spazio cartesiano. Si scriva il sistema lineare nelle incognite a, b, c, d ottenuto richiedendo che il piano passi per tre punti A, B e C. Sia $\mathbf{A}$ la matrice 3×4 dei coefficienti di tale sistema. Si mostri che $r(\mathbf{A}) = 3$ se e solo se i tre punti non sono allineati. Dedurre usando Rouché-Capelli che esiste un unico piano in $\mathbb{R}^3$ che passa per tre punti non allineati.

17 Si determini un'equazione $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = e$ per l'iperpiano di $\mathbb{R}^4$ passante per i punti $(1, -1, 3, -2)$, $(-2, 2, -4, 0)$, $(3, -4, 8, -3)$, $(2, -1, 8, -4)$.

18 Fissato $a \in \mathbb{R}$ si considerino le rette $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ di equazioni parametriche rispettivamente $(x, y, z) = (at, a^2t, 1 - t)$ e $(x, y, z) = (2 + u, 2 - 11u, -1 + 3u)$. Determinare i valori del parametro a per il quale le due rette sono incidenti, per tali valori trovare il punto P di incidenza. (*Risposta*: $a = 1$, $P = (2, 2, -1)$ e $a = -3$, $P = (3, -9, 2)$.)

19 Sia $\mathbf{A}$ una matrice di tipo (m, n) di rango r. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false, giustificando le risposte.

a) Se il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ammette soluzione per ogni $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, allora $r = m$. (*Risposta*: vero.)

b) Se $n = m$ ed esiste $\mathbf{b}_1 \in \mathbb{R}^n$ per cui il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_1$ ammette più di una soluzione, allora esiste $\mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^n$ per cui il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_2$ non ammette alcuna soluzione. (*Risposta*: vero.)

c) Se esiste $\mathbf{b}_1 \in \mathbb{R}^m$ per cui il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_1$ ammette infinite soluzioni, allora il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ammette infinite soluzioni per ogni $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. (*Risposta*: falso.)

d) Se il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ammette al più una soluzione per ogni $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, allora $r = n$. (*Risposta*: vero.)

e) Se $n = m$ ed esiste $\mathbf{b}_1 \in \mathbb{R}^n$ per cui il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_1$ non ammette alcuna soluzione, allora esiste $\mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^n$ per cui il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_2$ ammette infinite soluzioni. (*Risposta*: vero.)

f) Se esiste $\mathbf{b}_1 \in \mathbb{R}^m$ per cui il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_1$ ammette esattamente una soluzione, allora il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ammette esattamente una soluzione per ogni $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. (*Risposta*: falso.)

20 Verificare il teorema di Rouché-Capelli negli esempi del paragrafo 3.

21 Ridurre a scala le seguenti matrici.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & 6 & 9 \\ 5 & 14 & 22 & 31 & 40 \\ 3 & 8 & 15 & 21 & 28 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 4 & 4 & 7 & -2 \\ 1 & -6 & 2 & -2 & -3 & 1 & -3 \\ -3 & 8 & -6 & 1 & 2 & -4 & 10 \end{bmatrix}$$

22 Determinare il rango delle seguenti matrici.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 3 & 10 \\ -3 & -5 & -1 & -8 \\ 1 & 7 & 10 & 9 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 10 & -3 & 9 & 5 & 10 \\ -2 & 4 & 6 & -18 & 2 & 4 \\ -2 & -2 & 3 & -7 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 5 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

23 Determinare le soluzioni dei seguenti sistemi lineari.

$$a) \begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 5y - 3z = 0 \\ x + 4y - 8z = -18 \end{cases}, \qquad b) \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 3x + 8y - 2z = 2 \\ 2x - 2z = 8 \\ 3x + 4y - 8z = 18 \end{cases}, \qquad c) \begin{cases} 2x + y + 3z = -1 \\ 4x + 4y + 6z = 1 \\ 6x + 5y + 6z = -1 \\ 6x + y + 3z = -11 \end{cases}$$

© 978-88-08-52069-2

24 Risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 7x_4 + 7x_5 = 17 \\ x_1 - 4x_4 - x_5 = 2 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 + 7x_5 = 5 \end{cases}$$

25 Risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 - 4x_5 + x_6 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 7x_4 - 7x_5 - x_6 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 - 12x_4 - 12x_5 + 4x_6 = 0 \end{cases}$$

26 Tra le parabole di equazione

$$y = ax^2 + bx + c$$

determinare quella che passa per i punti $(-1, 2)$, $(0, 3)$ e $(1, 6)$.

Esempio

- Per la matrice identità $\mathbf{I} = \left[\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right]$ si ha $\mathbf{I}^k = \mathbf{I}$ per ogni $k \geq 1$.
- Anche per la matrice nulla $\mathbf{O} = \left[\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right]$ si ha $\mathbf{O}^k = \mathbf{O}$ per ogni $k \geq 1$.
- Più in generale, per una matrice diagonale si ha:

$$(\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n))^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)$$

- Per la matrice $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right]$ si ha $\mathbf{A}^k = \mathbf{A}$ per ogni $k \geq 1$: basta verificare che $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$, e questo è immediato.
- La matrice $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right]$ non è nulla, ma $\mathbf{A}^2 = \mathbf{O}$ è la matrice nulla. Quindi $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$ per ogni $k \geq 2$.
- La matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

soddisfa $\mathbf{A}^2 \neq \mathbf{O}$ e $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$ per ogni $k \geq 3$.

Esercizi

1 Moltiplicare la matrice $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 4 & 5\\ 6 & 7 & 8\end{smallmatrix}\right]$ a destra per i vettori $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$ e verificare che così si ottengono le colonne di $\mathbf{A}$. Moltiplicare poi $\mathbf{A}$ a sinistra per $\mathbf{e}_1^T$, $\mathbf{e}_2^T$ e $\mathbf{e}_3^T$ e verificare che così si ottengono le righe di $\mathbf{A}$.

2 Calcolare i prodotti indicati, dopo aver controllato che si possano effettuare e aver scritto il numero di righe e di colonne che la matrice prodotto deve avere in ciascun caso:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 2\\ 1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}3\\ 2\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ -1 & 4\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

3 Calcolare le potenze $\mathbf{A}^k$ della matrice $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{smallmatrix}\right]$
(*Risposta*: $\mathbf{A}^2 = \left[\begin{smallmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{smallmatrix}\right]$ e $\mathbf{A}^k = \mathbf{0}$ per $k \geq 3$.)

4 Sia $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{smallmatrix}\right]$ Determinare tutte le matrici $\mathbf{B} = \left[\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right]$ tali che $\mathbf{AB} = \left[\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right]$.
Suggerimento: le colonne di $\mathbf{B}$ appartengono al nucleo di $\mathbf{A}$. (*Risposta*: $\mathbf{B} = \left[\begin{smallmatrix}2x & 2y\\ -x & -y\end{smallmatrix}\right]$ con $x, y \in \mathbb{K}$.)

5 Per il prodotto di matrici *non vale la legge di annullamento*: il prodotto di due matrici può essere la matrice nulla senza che alcuno dei fattori sia nullo. Fornire dei controesempi: a) trovare una matrice quadrata di ordine due $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$, tale che $\mathbf{A}^2 = \mathbf{O}$; b) trovare due distinte matrici quadrate di ordine due $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$ e $\mathbf{B} \neq \mathbf{O}$ tali che $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$.

6 Per il prodotto di matrici *non vale la legge di cancellazione*: da $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ non segue $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ nemmeno se $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$. Trovare tre matrici quadrate di ordine due $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ tali che $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$, $\mathbf{B} \neq \mathbf{C}$, ma $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$. Mostrare però che la legge di cancellazione vale se $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$ contiene solo il vettore nullo.

7 Sia $\mathbf{A}$ una matrice quadrata di ordine n. Spiegare perché $\mathbf{A}^4 = \mathbf{A}\mathbf{A}^2\mathbf{A}$.

8 Sia $\mathbf{A}$ una matrice quadrata di ordine n. Mostrare che $\mathbf{A}^k\mathbf{A}^l = \mathbf{A}^{k+l}$ per ogni $k, l \geq 0$.

9 Dimostrare che per il prodotto di due matrici diagonali vale la formula

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n) = \operatorname{diag}(\lambda_1\mu_1, \ldots, \lambda_n\mu_n)$$

Concludere che il prodotto tra matrici diagonali è commutativo.

10 Sia $\mathbf{B} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 0 \end{smallmatrix}\right]$. Determinare tutte le matrici $\mathbf{A}$ di tipo $(2,2)$ che commutano con $\mathbf{B}$: $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

Suggerimento: occorre risolvere un sistema lineare che ha come incognite i 4 elementi della matrice $\mathbf{A}$. (*Risposta*: $\mathbf{A} = x\mathbf{I} + y\mathbf{B}$ con $x, y \in \mathbb{K}$.)

11 Trovare due matrici $\mathbf{A}$ e $\mathbf{D}$ di tipo $(2,2)$, con $\mathbf{D}$ diagonale, tali che $\mathbf{DA} \neq \mathbf{AD}$.

12 Sia $\mathbf{I}$ la matrice identità di ordine n. Mostrare che

$$(\lambda\mathbf{I})\mathbf{B} = \mathbf{B}(\lambda\mathbf{I})$$

per ogni matrice quadrata $\mathbf{B}$ di ordine n.

13 Sia $\mathbf{A}$ una matrice quadrata di ordine 2 che commuta con tutte le matrici quadrate di ordine 2:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} \quad \text{per ogni matrice } \mathbf{B} \text{ quadrata di ordine 2}$$

Dimostrare che $\mathbf{A}$ è un multiplo scalare dell'identità: esiste uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $\mathbf{A} = \lambda\mathbf{I}$. Dimostrare l'enunciato analogo per le matrici quadrate di ordine n.

14 Mostrare che il prodotto di due matrici triangolari alte è una matrice triangolare alta.

15 (Radici quadrate di $-\mathbf{I}$)

a) Mostrare che $\left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{smallmatrix}\right]^2 = \left[\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right] = -\mathbf{I}$. Più in generale $\left[\begin{smallmatrix} a & 1 \\ -1-a^2 & -a \end{smallmatrix}\right]^2 = -\mathbf{I}$.

b) Mostrare che ci sono infinite matrici quadrate $\mathbf{A}$ di ordine 2 a coefficienti reali (perfino interi) tali che $\mathbf{A}^2 = -\mathbf{I}$, e che tutte soddisfano $a_{22} = -a_{11}$.

c) Mostrare che esistono quattro matrici diagonali $\operatorname{diag}(\lambda, \mu)$ a coefficienti complessi (e nessuna a coefficienti reali) il cui quadrato è $-\mathbf{I}$.

4 MATRICI INVERTIBILI

In questo paragrafo assumeremo che tutte le matrici siano quadrate dello stesso ordine n. Ci chiediamo se è possibile definire l'inversa di una matrice $\mathbf{A}$. L'inverso a^{-1} di un numero a è l'unico numero b tale che

$$ab = 1$$

Si noti che l'inverso di un numero a esiste se e solo se $a \neq 0$.