ESERCIZI DI GEOMETRIA 1, FOGLIO 5

Trieste, 12 novembre 2019

1. Sia $f : V \to W$ un'applicazione e $G = \{(v, f(v) : v \in V\} \subset V \times W$ il grafico di f. Verificare che f è lineare se e solo se G è un sottospazio vettoriale di $V \times W$.

2. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare, e $v_1, \dots, v_n$ una base di V. Dimostrare che
(i) f è iniettiva se e solo se $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono linearmente indipendenti;
(ii) f è suriettiva se e solo se $f(v_1), \dots, f(v_n)$ generano W.

3. Siano V, W K-spazi vettoriali di dimensione finita, $f : V \to W$ un'applicazione lineare.
Dimostrare che, se f è iniettiva, esiste un'applicazione lineare $g : W \to V$ tale che $g \circ f = id_V$, mentre se f è suriettiva, esiste un'applicazione lineare $g : W \to V$ tale che $f \circ g = id_W$. (Suggerimento: usare i teoremi di completamento a una base e della determinazione di un'applicazione lineare.)

4. Siano W_1, W_2 sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Sia $f : W_1 \times W_2 \to V$ l'applicazione definita da $f(w_1, w_2) = w_1 + w_2$ (dove $W_1 \times W_2$ denota il prodotto definito nel foglio 3).
(i) Verificare che f è un'applicazione lineare.
(ii) Determinare il sottospazio immagine di f; che cosa si può dire della sua dimensione?
(iii) Descrivere gli elementi del nucleo di f ricordando che $Ker f \subset W_1 \times W_2$. Costruire una base per $Ker f$, a partire da una base di $W_1 \cap W_2$. Calcolare la dimensione di $Ker f$.
(iv) Dare una dimostrazione della relazione di Grassmann come conseguenza del teorema della dimensione per l'applicazione f appena considerata.