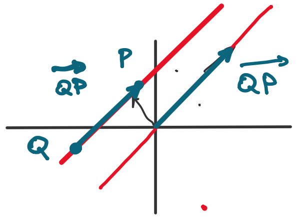
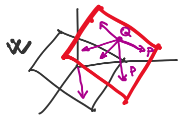
Lezione. 7. Novembre
giovedì 7 novembre 2019 13:26

GEOMETRIA AFFINE

IDEA: Generalizzare la geometria del piano e dello spazio ad una teoria valida in ogni dimensione





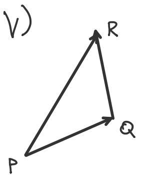
Def: Sia V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.
Uno SPAZIO AFFINE $\mathbb{A}$ su V è un insieme $\mathbb{A} \neq \emptyset$, i cui elementi si dicono PUNTI, con una funzione

$$\mathbb{A} \times \mathbb{A} \longrightarrow V$$
$$(P, Q) \longrightarrow \overrightarrow{PQ}$$

tale che

SA1 $\forall P \in \mathbb{A}$, e $\forall v \in V$
$\exists !\, Q \in \mathbb{A}$ tale che $v = \overrightarrow{PQ}$

SA2 $\forall P, Q, R \in \mathbb{A}$, vale
$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$$
(la somma è in V)



Def.: La DIMENSIONE di $\mathbb{A}$ è

$$\dim \mathbb{A} := \dim V$$

ESEMPIO: $\underbrace{\mathbb{A} = \mathbb{R}^n}_{\text{insieme di punti}}$, $\underbrace{V = \mathbb{R}^n}_{\text{insieme di vettori}}$

la funzione

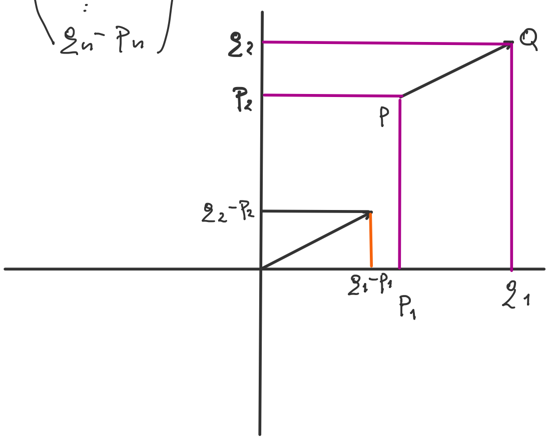
$$\mathbb{A} \times \mathbb{A} \longrightarrow V$$
$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$P \in \mathbb{R}^n$, $Q \in \mathbb{R}^n$

$P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ $\quad p_i \in \mathbb{R}$

$Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ $\quad q_i \in \mathbb{R}$

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{pmatrix}$$



Esercizio: la funzione così definita verifica (SA1) e (SA2)

Def.: $\mathbb{R}^n$ con questa struttura di spazio affine si indicherà con

$$\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}} \quad \text{oppure} \quad \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$$

Si ha: $\dim \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}} = \dim \mathbb{R}^n = n$

Def.: Sia $\mathbb{A}$ spazio affine su V.

Un RIFERIMENTO AFFINE è il dato di:

- un punto $O \in \mathbb{A}$, chiamato ORIGINE
- una base di V: $\{v_1, \dots, v_n\}$

Def.: Dato un riferimento affine in $\mathbb{A}$, ad ogni punto $P \in \mathbb{A}$ si possono associare delle COORDINATE AFFINI nel modo seguente: se O è l'origine,

Cons. $\overrightarrow{OP} \in V$

$\overrightarrow{OP}$ si scrive in modo UNICO come comb. lineare dei vettori della base:

$$\overrightarrow{OP} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$

Allora poniamo per definizione:

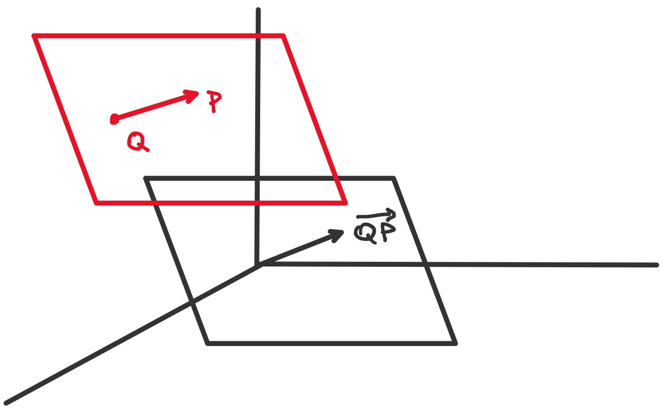
COORDINATE DI P = $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

Def.: Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine, sia $Q \in \mathbb{A}$ un punto e sia $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale. Il **SOTTOSPAZIO AFFINE $S \subseteq \mathbb{A}$ PASSANTE PER Q E PARALLELO A W** è il sottoinsieme:

$$S = \{ P \in \mathbb{A} \ : \ \overrightarrow{QP} \in W \}$$

W si dice **GIACITURA** di S.

2



Esempi: rette affini in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$: sono determinate da un punto $Q = (q_1, q_2) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ e da una retta vettoriale $W \subseteq \mathbb{R}^2$

Possiamo scegliere, ad esempio, $Q = (2,1)$ e

$W = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

La retta affine per Q e parallela a W è, per definizione,

$$S = \{ P = (p_1, p_2) \mid \overrightarrow{QP} \in W \} = \left\{ P = (p_1, p_2) \ \middle| \ \begin{pmatrix} p_1 - 2 \\ p_2 - 1 \end{pmatrix} \in W \right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} p_1 - 2 \\ p_2 - 1 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

per un opportuno $t \in \mathbb{R}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} p_1 - 2 = t \cdot 1 \\ p_2 - 1 = t \cdot 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_1 = 2+t \\ p_2 = 1+t \end{cases}$$ RETTA AFFINE in EQUAZ. PARAMETRICHE

Def.: Se S è un sottospazio affine con giacitura W, poniamo

$$\dim S := \dim W$$

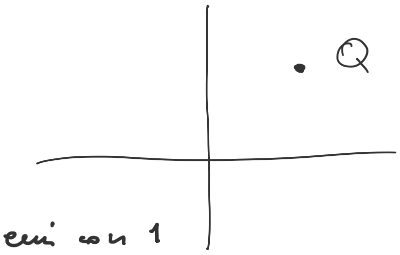
Oss.: Se $W = \{0\}$, $S = \{P \mid \overrightarrow{QP} \in W\}$

$$= \{0\}$$

quindi: $\overrightarrow{QP} = 0$

$$\iff P = Q$$

$$\Longrightarrow S = \{Q\}$$



Quindi: tutti i singoletti (sottoinsiemi con 1 solo punto) sono sottospazi affini, e si ha:

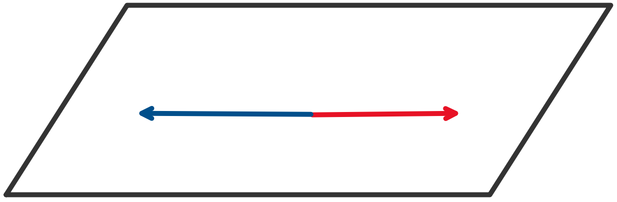
$$\dim\{Q\} = \dim\{0\} = 0$$

Def.: Se $\dim W = 1 = \dim S$
S si dice RETTA AFFINE

se $\dim W = 2 = \dim S$, S PIANO AFFINE.

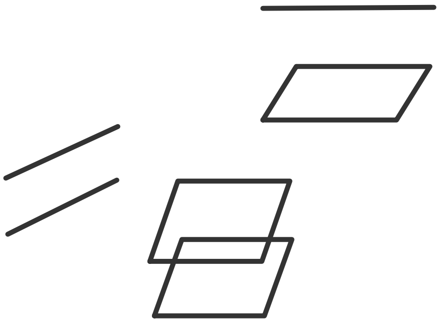
PARALLELISMO, INCIDENZA E SGHEMBITÀ:

Sia S un piano affine con giacitura W e sia T una retta affine con giacitura U; diremo che S e T sono PARALLELI se $U \subseteq W$:



In generale diamo le seguenti definizioni:

Siano S e S' due sottospazi affini di giaciture W e W'.
S e S' si dicono:

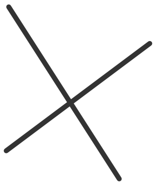


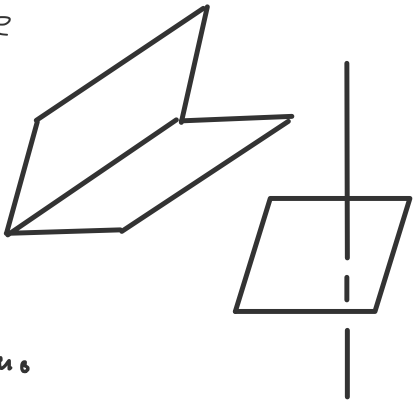
① **PARALLELI** se $W \subseteq W'$ oppure $W' \subseteq W$

scriveremo: $S \,/\!/\, S'$

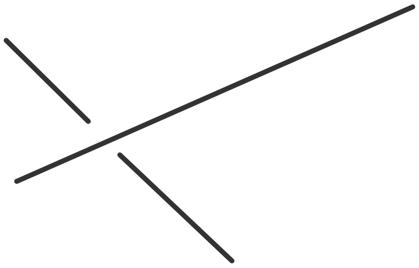
② S e S' si dicono **INCIDENTI** se

$$S \cap S' \neq \emptyset$$





③ S e S' si dicono **SGHEMBI** se non sono paralleli né incidenti:



EQUAZIONI PARAMETRICHE DI SOTTOSPAZI AFFINI:

Supp. $\mathbb{A} = \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$

$S = \{ P \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}} \mid \overrightarrow{QP} \in W \}$

$W \subseteq \mathbb{R}^n$, fisso una base per W:

$$\{ w_1, w_2, \dots, w_k \}$$

$P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$

UGUAGLIANZA TRA VETTORI

$$\overrightarrow{QP} \in W \iff \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ x_2 - q_2 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix}}_{\Rightarrow \text{ trovo tutti i punti di } S} = \underbrace{t_1 w_1 + t_2 w_2 + \dots + t_k w_k}_{\substack{\text{al variare di } t_1, \dots, t_k \\ \text{trovo tutti i vettori} \\ \text{di } W}}$$

$w_1, \dots, w_k \in \mathbb{R}^n$

Cons. le componenti $w_1 = \begin{pmatrix} w_{11} \\ \vdots \\ w_{n1} \end{pmatrix}$

$$w_2 = \begin{pmatrix} w_{12} \\ \vdots \\ w_{n2} \end{pmatrix}, \dots, w_k = \begin{pmatrix} w_{1k} \\ \vdots \\ w_{nk} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ x_2 - q_2 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} w_{11} \\ \vdots \\ w_{n1} \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} w_{12} \\ \vdots \\ w_{n2} \end{pmatrix} + \dots + t_k \begin{pmatrix} w_{1k} \\ \vdots \\ w_{nk} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} t_1 w_{11} + t_2 w_{12} + \dots + t_k w_{1k} \\ t_1 w_{21} + t_2 w_{22} + \dots + t_k w_{2k} \\ \vdots \\ t_1 w_{n1} + t_2 w_{n2} + \dots + t_k w_{nk} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - q_1 = t_1 w_{11} + t_2 w_{12} + \dots + t_k w_{1k} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_n - q_n = t_1 w_{n1} + t_2 w_{n2} + \dots + t_k w_{nk} \end{cases}$$

EQUAZIONI PARAMETRICHE DI S