Teorema: Sia $A \cdot x = b$ compatibile, $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Consideriamo $\mathbb{R}^n$ come spazio affine: $\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$.
Allora l'insieme delle soluzioni di $A \cdot x = b$ forma un sottospazio affine $S \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$ con

$$\dim S = n - rg\, A$$

e giacitura data dal sottospazio $W \subseteq \mathbb{R}^n$ delle soluzioni di $A \cdot x = 0$.

Dim.: Per il Teorema di Struttura delle soluzioni di $A \cdot x = b$:
ogni soluzione

$$s = \tilde{s} + s_0$$

con $A\tilde{s} = b$, $A s_0 = 0$

in altre parole: s è soluzione sse

$$\underbrace{s - \tilde{s}}_{n\text{-upla}} \in \underbrace{W}_{\left\{\begin{array}{c}\text{sottospazio delle soluzioni}\\ \text{di } A \cdot x = 0\end{array}\right\}}$$

Identifico $\mathbb{R}^n$ con $\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$ (pongo una struttura affine su $\mathbb{R}^n$)

In questo modo: $S = \{\text{soluzioni di } A \cdot x = b\}$ = sottospazio affine di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$ passante per $\tilde{s}$ e con giacitura W

$$S = \{s : s - \tilde{s} \in W\} \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}, \quad W \subseteq \mathbb{R}^n$$

Per definizione di dimensione di S abbiamo:

$$\dim S = \dim W \underset{\text{per il Teorema di Dimensione}}{=} n - rg\, A$$

Richiamo: Nell'enunciato del Teorema di Rouché-Capelli abbiamo scritto che il sistema ammette "∞^{n-r}" soluzioni, con $r = rg\, A$. Enunciato più corretto: il sistema ha un sottospazio affine di soluzioni, di dimensione $n-r$.

Def. Se $S \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$ è un sottospazio affine che è l'insieme delle soluzioni di $A \cdot x = b$,

allora le equazioni di $A \cdot x = b$ si dicono **EQUAZIONI CARTESIANE per S.**

oss. Data S con eq. cartesiane, le equazioni non sono univocamente determinate; infatti:

S: $Ax = b$, con Gauss trovo sistema equivalente $\tilde{A} \cdot x = \tilde{b}$: altre equazioni per S.

LEMMA: Ogni sottospazio affine $S \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$ ammette delle equazioni cartesiane.

Dim: Sia $Q = (q_1, \dots, q_n) \in S$

$W = \mathrm{Span}(\underbrace{w_1, \dots, w_k}_{\text{base di } W})$ giacitura di S

$w_1 = \begin{pmatrix} w_{11} \\ \vdots \\ w_{n1} \end{pmatrix}, \dots, w_k = \begin{pmatrix} w_{1k} \\ \vdots \\ w_{nk} \end{pmatrix}$

eq. parametriche di S:

$$\begin{cases} x_1 - q_1 = t_1 w_{11} + \dots + t_k w_{1k} \\ \vdots \\ x_n - q_n = t_1 w_{n1} + \dots + t_k w_{nk} \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} w_{11} \\ \vdots \\ w_{n1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} w_{1k} \\ \vdots \\ w_{nk} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix}$$

sono linearmente dipendenti $\iff$

$$rg \overbrace{\begin{pmatrix} w_{11} & \dots & w_{1k} & x_1 - q_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ w_{n1} & \dots & w_{nk} & x_n - q_n \end{pmatrix}}^{\text{matrice } n \times (k+1)} = k$$

k colonne linearmente indipendenti

Con alg. di Gauss la ridurrò a scala e deve avere k righe non nulle

$\iff$ $n-k$ righe nulle; in particolare troverò $n-k$ condizioni lineari in $x_1, \dots, x_n$ che si devono annullare (gli ultimi $n-k$ termini della ultima colonna).

Esempio:

Retta nel piano: $\begin{cases} x_1 - 1 = 3t \\ x_2 - 1 = 2t \end{cases}$

$Q = (1, 1)$, $W = \mathrm{Span}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}_{w_1}\right)$

$$rg \begin{pmatrix} 3 & x_1 - 1 \\ 2 & x_2 - 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$R_2 - \frac{2}{3} R_1 \rightsquigarrow$$

$$rg \begin{pmatrix} 3 & x_1 - 1 \\ 0 & x_2 - 1 - \frac{2}{3}(x_1 - 1) \end{pmatrix} = 1$$

$$\iff x_2 - 1 - \frac{2}{3} x_1 + \frac{2}{3} = 0 \quad \text{eq. cartesiana}$$

Es.: Retta nello spazio:

$$\begin{cases} x_1 - 5 = t \\ x_2 - 3 = t \\ x_3 - 1 = t \end{cases} \qquad W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$rg \begin{pmatrix} 1 & x_1 - 5 \\ 1 & x_2 - 3 \\ 1 & x_3 - 1 \end{pmatrix} = 1$$

$R_2 - R_1$, $R_3 - R_1$:

$$rg \begin{pmatrix} 1 & x_1 - 5 \\ 0 & x_2 - 3 - x_1 + 5 \\ 0 & x_3 - 1 - x_1 + 5 \end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{cases} x_2 - x_1 + 2 = 0 \\ x_3 - x_1 + 4 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 - x_1 = -2 \\ x_3 - x_1 = -4 \end{cases}$$

EQUAZIONI CARTESIANE DELLA RETTA (NELLO SPAZIO)