Lezione 13 novembre

mercoledì 13 novembre 2019 11:16

Def: Un sottospazio affine $S \subseteq \mathbb{A}^n_K$ si dice IPERPIANO se

$$\dim S = n-1 = \dim \mathbb{A}^n_K - 1$$

Esempi: $n=2$, iperpiano = retta

$n=3$ iperpiano = piano

$n=4,5,6,\dots$ iperpiano

Prop. Ogni iperpiano di $\mathbb{A}^n_K$ può essere descritto da 1 equazione cartesiana:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = d \quad \text{con } a_i \in K$$

NON TUTTI NULLI

Dim. $\dim S = n-1$. Dalle eq. parametriche in $t_1, \dots, t_{n-1}$ parametri posso ott. eq. cartesiane come visto lunedì:

$$Ax = b \quad ⊛$$

oss. sist. lineare è compatibile (poiché $S \neq \emptyset$)

$$\boxed{n-1 = \dim S = \dim W}$$

$\downarrow$ giacitura di S

$$W = \{\text{soluzioni di } A \cdot X = 0\}$$

Per il Teorema di Dimensione

$$\boxed{\dim W = n - rg(A)} \Rightarrow rg(A) = 1$$

⊛ compatibile $\xRightarrow{\text{Rouché - Capelli}}$ $rg(A) = rg(A|b) = 1$

$\Rightarrow$ con Gauss ottengo $\tilde{A} \cdot X = \tilde{b}$

con $\tilde{A}$ a scala di rango 1

$\Rightarrow$ ha 1! riga non nulla

$\Rightarrow$ $\tilde{A}x = \tilde{b}$ consiste in 1! equazione.

OSS. IMPORTANTE: l'eq. cartesiana NON è UNICA, ma è determinata a meno di un fattore di proporzionalità:

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = d$$

$$\iff \underbrace{a_1x_1 + \dots + a_nx_n - d = 0} \quad / \cdot c$$

$$c \neq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$c \cdot (a_1x_1 + \dots + a_nx_n - d) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{ca_1x_1 + \dots + ca_nx_n = c\cdot d}$$

PASSAGGIO DA EQ. CARTESIANE A EQ. PARAMETRICHE:

Supp. $S \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ con $A\cdot X = b$

per trovare delle eq. parametriche per S

basta RISOLVERE IL SISTEMA e

porre le indeterminate libere = parametri $t_1, t_2, \dots, t_k$

Esempio: $S \subseteq \mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ dato da

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ -3x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{11}{6}x_4 \\ x_3 = -\frac{1}{3}(1 - 2x_4) \end{cases}$$

$$x_2 = t_1, \qquad x_4 = t_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{rg } A = \text{rg } (A|b) = 2$$

$$\dim S = \dim \mathcal{W} = n - \text{rg } A = 4 - 2 = 2$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{2}t_1 - \frac{11}{6}t_2 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}t_2 \\ x_4 = t_2 \end{cases}$$

$$\qquad w_1 \qquad w_2$$

$$\begin{cases} x_1 = q_1 + w_{11}t_1 + w_{12}t_2 \\ x_2 = q_2 + w_{21}t_1 + w_{22}t_2 \\ x_3 = q_3 + w_{31}t_1 + w_{32}t_2 \\ x_4 = q_4 + w_{41}t_1 + w_{42}t_2 \end{cases}$$

$$= Q$$

$$Q = (2/3, 0, -1/3, 0)$$

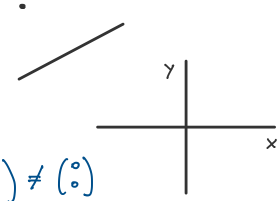
$$w_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} -11/6 \\ 0 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

GEOMETRIA DEL PIANO AFFINE

Cons. $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ (opp. $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$), dim $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} = 2$

$S \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ sottosp. affine

$$\dim S = \begin{cases} 0 & S = \{Q\} \\ 1 & S = \text{retta} \\ 2 & S = \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \end{cases}$$



RETTE: $W = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}\right)$, $\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$Q = (q_1, q_2)$

$$r: \begin{cases} x = q_1 + lt \\ y = q_2 + mt \end{cases} \qquad \begin{cases} x - q_1 = t \cdot l \\ y - q_2 = t \cdot m \end{cases}$$

eq. cartesiana $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} l & x - q_1 \\ m & y - q_2 \end{pmatrix} = 1$

in questo caso $\Longleftrightarrow$ $\det\begin{pmatrix} l & x - q_1 \\ m & y - q_2 \end{pmatrix} = 0$

$$l(y - q_2) - m(x - q_1) = 0$$

$$-mx + ly = -mq_1 + lq_2$$

Se invece retta: $ax + by = c$

eq. parametriche: $y = t$

se $a \neq 0$ $\quad x = \frac{1}{a}(-bt + c)$

$$\begin{cases} x = \frac{c}{a} - \frac{b}{a} \cdot t \\ y = t \end{cases}$$

$Q = (c/a, 0)$

$\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b/a \\ 1 \end{pmatrix}$

se $a = 0$, sicuramente $b \neq 0$ e simile.

Es: $Q = (-2, 1)$, $W = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$

$$r: \begin{cases} x = -2 + 1\cdot t \\ y = 1 + 3\cdot t \end{cases}$$

eq. cartesiana: $\begin{pmatrix} 1 & x-(-2) \\ 3 & y-1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & x+2 \\ 3 & y-1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x+2 \\ 3 & y-1 \end{pmatrix} = y-1 - (3(x+2))$$

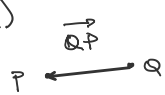
$$= y - 1 - 3x - 6$$

eq. $-3x + y = 7$

RETTA PER 2 PUNTI:

$P = (p_1, p_2)$, $Q = (q_1, q_2)$

$P \neq Q$



Pb: Quante rette passano per P e Q?

scelgo Q come punto base

$r:$ se $P \in r$, $Q \in r$ $\overset{\text{def. s.affine}}{\Longrightarrow}$ $\overrightarrow{QP} \in W$

$$\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} p_1 - q_1 \\ p_2 - q_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dim W = 1 \Longrightarrow W = \operatorname{Span}(\overrightarrow{QP})$$

$$= \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} p_1 - q_1 \\ p_2 - q_2 \end{pmatrix}\right)$$

$\Longrightarrow$ la retta $\exists!$.

EQ. PARAMETRICHE:

$$\boxed{\begin{cases} x = q_1 + (p_1 - q_1)\cdot t \\ y = q_2 + (p_2 - q_2)\cdot t \end{cases}}$$

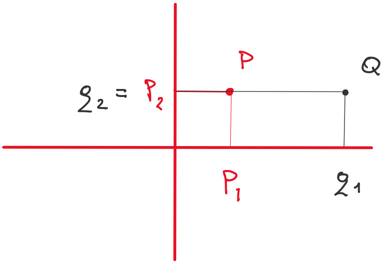
EQ.:CARTESIANA:

$$\det \begin{pmatrix} p_1 - q_1 & x - q_1 \\ p_2 - q_2 & y - q_2 \end{pmatrix} = 0$$

☺ $$\boxed{(p_1-q_1)(y-q_2)-(p_2-q_2)(x-q_1)=0}$$

⚠ $$\frac{y-q_2}{p_2-q_2} \overset{(*)}{=} \frac{x-q_1}{p_1-q_1}$$

Se $p_2 = q_2$, (*) NON si può scrivere



Esempio: $2x - y = 3$ $\quad r$

$2y - 4x = 7$ $\quad r'$

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -4x + 2y = 7 \end{cases}$$

$W : 2x - y = 0$

$W' : -4x + 2y = 0 \Rightarrow W = W'$

$-2(2x - y) = 0$

$r \parallel r'$ $\quad \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = 1$

$r \cap r' = \emptyset$ $\quad \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix} = 2$

CONDIZIONI DI PARALLELISMO E INCIDENZA – CASO DI EQ. CARTESIANE

Cons. 2 rette $r, r' \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ di equazioni cartesiane

$r: ax + by = c$ $\quad\quad r': a'x + b'y = c'$

con giacitura W di eq. $\quad\quad$ con giacitura W' di eq.

$ax + by = 0$ $\quad\quad a'x + b'y = 0$

$\dim W = 1$ $\quad\quad \dim W' = 1$

Allora: $r \parallel r' \Leftrightarrow W = W' \underset{\substack{\text{siccome} \\ \dim W = \dim W' = 1}}{\Leftrightarrow} \dim W \cap W' = 1$

Osservo che i vettori di $W \cap W'$ sono esattamente le soluzioni di
$$\begin{cases} ax+by=0 \\ a'x+b'y=0 \end{cases}$$

lo spazio delle soluzioni ha dim 1 $\Longleftrightarrow$ $n - \text{rg}\, A = 1$

$$2-\text{rg}\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}=1$$

$$\Longleftrightarrow \text{rg}\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}=1 \Longleftrightarrow \det\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}=0 \Longleftrightarrow ab'-a'b=0.$$

Osservo ora che 2 rette parallele potrebbero anche essere coincidenti (hanno la stessa giacitura, quindi verificano la definizione di parallelismo)

Domanda: come si distinguono 2 rette parallele "vere" (cioè diverse) da 2 rette coincidenti?

IDEA: 2 rette coincidenti hanno punti in comune.

Quindi: usiamo Rouché - Capelli:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

$$r /\!/ r' : \quad \text{rg}\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}=1$$

Cons.: $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$: il rango può essere:

- $\text{rg}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}=1 \underset{RC}{\Longrightarrow}$ il sistema ha ∞^{2-1} soluzioni

  $\Longrightarrow$ le due rette coincidono $r=r'$

- $\text{rg}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}=2 \underset{RC}{\Longrightarrow}$ il sistema è incompatibile, non ammette soluzioni

  $\Longrightarrow r \cap r' = \emptyset$

  e sono "vere" parallele

Supp. ora $r \not\parallel r'$, quindi $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 2$, o equivalentemente

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \neq 0$$

Per il Teorema di Cramer, il sistema ha 1! soluzione per ogni scelta di c e c' $\Longrightarrow$

$$r \cap r' = \{P\}$$

Le coordinate di P si possono calcolare con le Formule di Cramer:

$$P = (p_1, p_2) \quad \text{con} \quad p_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} c & b \\ c' & b' \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}}, \quad p_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} a & c \\ a' & c' \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}}$$

CONDIZIONI DI PARALLELISMO E INCIDENZA – CASO DI EQ. PARAMETRICHE

Cons. 2 rette r e r' con equazioni parametriche

$$r: \begin{cases} x = q_1 + l t \\ y = q_2 + m t \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x = q_1' + l' \tau \\ y = q_2' + m' \tau \end{cases}$$

(τ = tau, lettera greca)

$$W = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}\right) \qquad W' = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} l' \\ m' \end{pmatrix}\right)$$

Allora: $r \parallel r'$ (parallele "vere" o coincidenti)

$$\Longleftrightarrow \operatorname{rg}\begin{pmatrix} l & l' \\ m & m' \end{pmatrix} = 1$$

$$\Longleftrightarrow \det\begin{pmatrix} l & l' \\ m & m' \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow l m' - l' m = 0$$

$$r \cap r' = \{P\} \Longleftrightarrow \operatorname{rg}\begin{pmatrix} l & l' \\ m & m' \end{pmatrix} = 2$$

$$\Longleftrightarrow \det\begin{pmatrix} l & l' \\ m & m' \end{pmatrix} \neq 0$$

$$l m' - l' m \neq 0$$

Per trovare il punto di intersezione bisogna risolvere il sistema di 2 equazioni in 2 indeterminate t e τ:

$$\begin{cases} q_1 + l t = q_1' + l' \tau \\ q_2 + m t = q_2' + m' \tau \end{cases}, \text{ ovvero } \circledast \begin{cases} l t - l' \tau = q_1' - q_1 \\ m t - m' \tau = q_2' - q_2 \end{cases}$$

oss.: se $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} l & l' \\ m & m' \end{pmatrix} = 2 \Longrightarrow \operatorname{rg}\begin{pmatrix} l & -l' \\ m & -m' \end{pmatrix} = 2$

infatti: $\det\begin{pmatrix} l & l' \\ m & m' \end{pmatrix} = l m' - l' m \neq 0$ $\qquad \det\begin{pmatrix} l & -l' \\ m & -m' \end{pmatrix} = -l m' + l' m = -(l m' - l' m) \neq 0$

$\Longrightarrow$ per il Teorema di Cramer, $\circledast$ ha un'unica soluzione.