Corso di GEOMETRIA
Prima prova di esonero A.A. 2019/2020 - 12 novembre 2019
Prof. Valentina Beorchia

Cognome	Nome	Corso di Laurea	Scuola
BEORCHIA	VALENTINA		

6

- Si consideri la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} -2 & 10 & 2-4t \\ 2 & -4 & 4-2t \\ -8 & 6 & 4t+2 \end{pmatrix}$$

con $t \in \mathbb{R}$ parametro reale. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ si determini il sottospazio W_t delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$A_t \cdot X = 0$$

e la sua dimensione.

$$\tilde{A}_t = \begin{pmatrix} -2 & 10 & 2-4t \\ 0 & 6 & 6-6t \\ 0 & 0 & 28-14t \end{pmatrix}, \quad rg\,\tilde{A}_t = rg\,A_t = \begin{cases} 3 & se\ t \neq 2 \\ 2 & se\ t = 2 \end{cases}$$

Se $t \neq 2$, $\dim W_2 = 0$

se $t = 2$ $\dim W_2 = 1$, sol. generale $\begin{pmatrix} 2c \\ c \\ c \end{pmatrix}$

8

- Per $t = 3$ si calcoli $\det A_3$ con un metodo a piacere e si trovi la soluzione, usando il metodo di Gauss o la Formula di Cramer, del sistema lineare non omogeneo

$$A_3 \cdot X = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\det A_3 = 168$, $s = \begin{pmatrix} 23/21 \\ 4/7 \\ 19/42 \end{pmatrix}$

(2) • In $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio

6

$$W = \operatorname{Span}\left(\overset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}, \overset{v_2}{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \overset{v_3}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}, \overset{v_4}{\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}}, \overset{v_5}{\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}} \right)$$

Si determini $\dim W$ e una sua base.

$\dim W = 2$, base $= \{v_1, v_3\}$

6 • Si estenda la base di W a una base di $\mathbb{R}^4$.

Se aggiungo $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ trovo

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 4.$$

$\Rightarrow$ base di $\mathbb{R}^4$: $\{v_1, v_3, e_1, e_2\}$

• Si determini un sottospazio di U di $\mathbb{R}^4$ che sia in somma diretta con W e tale che

4

$$W \oplus U = \mathbb{R}^4.$$

Basta considerare $U = \operatorname{Span}(e_1, e_2)$.

Infatti: $W + U = \operatorname{Span}(v_1, v_3, e_1, e_2) = \mathbb{R}^4$

inoltre $W \cap U = \{0\}$: infatti se $v \in W \cap U$,

$v = c_1 v_1 + c_3 v_3 = a_1 e_1 + a_2 e_2 \Longrightarrow$ $c_1 v_1 + c_3 v_3 - a_1 e_1 - a_2 e_2 = 0$

ma v_1, v_3, e_1, e_2 sono linearmente indipendenti $\Rightarrow c_1 = c_3 = a_1 = a_2 = 0$

$\Longrightarrow v = 0$

Corso di GEOMETRIA
Prima prova di esonero A.A. 2019/2020 - 12 novembre 2019
Prof. Valentina Beorchia

Cognome	Nome	Corso di Laurea	Scuola

6

(1) • Si consideri la matrice

$$B_t = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 4t+2 \\ -3 & 6 & -4t+2 \\ 12 & -4 & 2t+4 \end{pmatrix}$$

con $t \in \mathbb{R}$ parametro reale. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ si determini il sottospazio W_t delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$B_t \cdot X = 0$$

e la sua dimensione.

$$\tilde{B}_t = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 4t+2 \\ 0 & 16 & 4 \\ 0 & 0 & -14t+7 \end{pmatrix}, \quad rg\, \tilde{B}_t = rg\, B_t = \begin{cases} 2 & \text{se } t = 1/2 \\ 3 & \text{se } t \neq 1/2 \end{cases}$$

$\dim W_{1/2} = 1$, soluz. generica

se $t \neq 1/2$, $\dim W_t = 0$.

• Per $t = 0$ si calcoli $\det B_0$ con un metodo a piacere e si trovi la soluzione, usando il metodo di Gauss o la Formula di Cramer, del sistema lineare non omogeneo

8

$$B_0 \cdot X = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\det B_0 = 336$$

$$s = \begin{pmatrix} 1/14 \\ -3/28 \\ -1/14 \end{pmatrix}$$

(2) 6 • In $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio

$$W = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-5\\2\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-4\\4\\-5\end{pmatrix}\right)$$

Si determini $\dim W$ e una sua base.

$\dim W = 2$

base $\left\{\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\-1\end{pmatrix}\right\}$

6 • Si estenda la base di W a una base di $\mathbb{R}^4$.

Se aggiungo $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ trovo 4 vettori linearmente indipendenti

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4} = \left\{\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

4

• Si determini un sottospazio di U di $\mathbb{R}^4$ che sia in somma diretta con W e tale che

$$W \oplus U = \mathbb{R}^4.$$

Basta prendere $U = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$; motivazione simile al compito precedente

Corso di GEOMETRIA
Prima prova di esonero A.A. 2019/2020 - 12 novembre 2019
Prof. Valentina Beorchia

Cognome	Nome	Corso di Laurea	Scuola

6

(1) • Si consideri la matrice

$$C_t = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 2t+4 \\ -3 & 6 & 2t-4 \\ 12 & -4 & 4t+2 \end{pmatrix}$$

con $t \in \mathbb{R}$ parametro reale. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ si determini il sottospazio W_t delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$C_t \cdot X = 0$$

e la sua dimensione.

$$\tilde{C}_t = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 2t+4 \\ 0 & 16 & 4t \\ 0 & 0 & 7t-14 \end{pmatrix}, \quad rg\, \tilde{C}_t = rg\, C_t = \begin{cases} 2 & se\ t=2 \\ 3 & se\ t\neq 2 \end{cases}$$

$\dim W_2 = 1$, soluzione generale $\begin{pmatrix} 2c \\ c \\ -2c \end{pmatrix}$

per $t \neq 2$, $\dim W_t = 0$

8

• Per $t = 0$ si calcoli $\det C_0$ con un metodo a piacere e si trovi la soluzione, usando il metodo di Gauss o la Formula di Cramer, del sistema lineare non omogeneo

$$C_0 \cdot X = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\det C_0 = -672$

$$s = \begin{pmatrix} 1/28 \\ -1/8 \\ 1/28 \end{pmatrix}$$

(2) 6 • In $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio

$$W = \text{Span}\left(\overset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}, \overset{v_2}{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \overset{v_3}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}, \overset{v_4}{\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}}, \overset{v_5}{\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}} \right)$$

Si determini dim W e una sua base.

$\dim W = 3$, base $\mathcal{B} = \{v_1, v_3, v_5\}$

6 • Si estenda la base di W a una base di $\mathbb{R}^4$.

Sicuramente $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \text{Span}(v_1, v_3, v_5)$

$\Rightarrow$ una base di $\mathbb{R}^4$ è: $\{v_1, v_3, v_5, e_3\}$

4 • Si determini un sottospazio di U di $\mathbb{R}^4$ che sia in somma diretta con W e tale che

$$W \oplus U = \mathbb{R}^4.$$

Basta prendere $U = \text{Span}(e_3)$

Motivazione: simile al compito precedente

Corso di GEOMETRIA
Prima prova di esonero A.A. 2019/2020 - 12 novembre 2019
Prof. Valentina Beorchia

Cognome	Nome	Corso di Laurea	Scuola

(1) 6 • Si consideri la matrice

$$D_t = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 2t+2 \\ -2 & 6 & 2-3t \\ 12 & -4 & 2t+4 \end{pmatrix}$$

con $t \in \mathbb{R}$ parametro reale. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ si determini il sottospazio W_t delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$D_t \cdot X = 0$$

e la sua dimensione.

$$\tilde{D}_t = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 2t+2 \\ 0 & 26 & 6+t \\ 0 & 0 & \frac{112}{13} - \frac{224}{13}t \end{pmatrix}, \quad rg\,\tilde{D}_t = rg\,D_t = \begin{cases} 2 & se\ t = 1/2 \\ 3 & se\ t \neq 1/2 \end{cases}$$

$\dim W_{1/2} = 1$, soluzione generica $\begin{pmatrix} 2c \\ c \\ -4c \end{pmatrix}$

se $t \neq \frac{1}{2}$, $\dim W_t = 0$

8 • Per $t = 1$ si calcoli $\det D_1$ con un metodo a piacere e si trovi la soluzione, usando il metodo di Gauss o la Formula di Cramer, del sistema lineare non omogeneo

$$D_1 \cdot X = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\det D_1 = 224$

$$S = \begin{pmatrix} -5/112 \\ -5/32 \\ 17/112 \end{pmatrix}$$

(2) • In $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio

$$W = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\0\\0\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\0\\0\\-5\end{pmatrix}\right)$$

Si determini $\dim W$ e una sua base.

$\dim W = 2$

base $\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}}_{=v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}2\\0\\0\\-1\end{pmatrix}}_{=v_3} \right\}$

• Si estenda la base di W a una base di $\mathbb{R}^4$.

aggiungo $\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}}_{=e_2}$ e $\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}}_{=e_3}$

• Si determini un sottospazio di U di $\mathbb{R}^4$ che sia in somma diretta con W e tale che

$$W \oplus U = \mathbb{R}^4.$$

$U = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$; si ha

$W + U = \text{Span}(v_1, v_3, e_2, e_3) = \mathbb{R}^4$; inoltre $W \cap U = \{0\}$

infatti se $v \in W \cap U$, $\left.\begin{array}{l} v = c_1 v_1 + c_3 v_3 \\ \quad \| \\ \quad a_2 e_2 + a_3 e_3 \end{array}\right\} \Rightarrow c_1 v_1 + c_3 v_3 - a_2 e_2 - a_3 e_3 = 0$ ma i 4 vettori sono linearmente indipendenti $\Rightarrow c_1 = c_2 = a_2 = a_3 = 0 \Rightarrow v = 0$.

Corso di GEOMETRIA
Prima prova di esonero A.A. 2019/2020 - 12 novembre 2019
Prof. Valentina Beorchia

Cognome	Nome	Corso di Laurea	Scuola

6

1) • Si consideri la matrice

$$G_t = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 2t+1 \\ -12 & 8 & 1-3t \\ 16 & 0 & 2t+2 \end{pmatrix}$$

con $t \in \mathbb{R}$ parametro reale. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ si determini il sottospazio W_t delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$G_t \cdot X = 0$$

e la sua dimensione.

$$\tilde{G}_t = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 2t+1 \\ 0 & 32 & t+3 \\ 0 & 0 & -7/3\, t + \frac{7}{3} \end{pmatrix}, \quad rg\, \tilde{G}_t = rg\, G_t = \begin{cases} 2 & se\ t=1 \\ 3 & se\ t \neq 1 \end{cases}$$

$\dim W_1 = 1$, la soluz. generica $\begin{pmatrix} 2c \\ c \\ -8c \end{pmatrix}$

se $t \neq 1$, $\dim W_t = 0$

8

• Per $t = 0$ si calcoli $\det G_0$ con un metodo a piacere e si trovi la soluzione, usando il metodo di Gauss o la Formula di Cramer, del sistema lineare non omogeneo

$$G_0 \cdot X = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\det G_0 = 448$

$$s = \begin{pmatrix} 3/112 \\ -27/224 \\ 2/7 \end{pmatrix}$$

(2) 6 • In $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio

$$W = \mathrm{Span}\left(\begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

Si determini $\dim W$ e una sua base.

$\dim W = 3$, base $\{ v_1, v_2, v_5 \}$

6 • Si estenda la base di W a una base di $\mathbb{R}^4$.

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_5)$$

$\Longrightarrow$ base di $\mathbb{R}^4$: $\{ v_1, v_2, v_5, e_3 \}$

4 • Si determini un sottospazio di U di $\mathbb{R}^4$ che sia in somma diretta con W e tale che

$$W \oplus U = \mathbb{R}^4.$$

Basta prendere $U = \mathrm{Span}(e_3)$

motivazione come compiti precedenti