• <u>Esercizi per casa</u>:

1) Usando l'ortogonalità tra le funzioni

$$1, \left\{\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right\}_{n\geq 1} \quad \text{su } [-L, L]$$

mostra che vale l'identità di Parseval per le serie di Fourier:

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} dx\, |f(x)|^2 = 2|\alpha_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2\right).$$

Dove: $f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \beta_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right)$

Applica questa identità alla funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x+L, & -L \leq x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x-L, & 0 < x \leq +L \end{cases}$$

e usalo per dimostrare che: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

2) Applica la trasformata di Fourier all'equazione differenziale:

$$\frac{d}{dt} f(t) + \frac{2t}{T^2} f(t) = 0$$

per trovare un'equazione per $\hat{f}(\omega)$.
Usa questo per dedurre che la trasformata di Fourier di una Gaussiana è ancora una Gaussiana (senza calcolare esplicitamente la trasformata).
Calcola $\hat{f}(0)$ per trovare una relazione tra le costanti arbitrarie nelle soluzioni alle equazioni per f e $\hat{f}$.