Singolarità isolate di: $\frac{\sin z}{z^2} - \frac{\cos z}{z}$

Attorno a $z=0$:

$$\sin z = z - \frac{1}{3!} z^3 + O(z^5)$$

$$\cos z = 1 - \frac{1}{2} z^2 + O(z^4)$$

$$\Rightarrow \frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!} z + O(z^3)$$

$$\frac{\cos z}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} z + O(z^3)$$

$$\Rightarrow \frac{\sin z}{z^2} - \frac{\cos z}{z} = \cancel{\frac{1}{z}} - \frac{1}{3!} z - \cancel{\frac{1}{z}} + \frac{1}{2} z + O(z^3)$$

$$= \frac{1}{3} z + O(z^3)$$

$z=0$ è una singolarità rimuovibile, non è una singolarità. La funzione ha uno zero di ordine 1.

Attorno a $z=\infty$: sia $\sin z$ che $\cos z$ hanno ∞ potenze positive $\Rightarrow$ singolarità essenziale. Il residuo è $-1 \times$ il coefficiente di $\frac{1}{z}$. Ma dal calcolo sopra vediamo che non ci sono potenze negative $\Rightarrow \operatorname{Res}(\infty) = 0$

Singolarità isolate di: $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}{(z^2-1)^2}$

Attorno a $z = \pm 1$: Il denominatore ha uno zero di ordine 2, mentre il numeratore ha uno zero di ordine 1:

$$\sin\left(\frac{\pi}{z}\right) = (z-(\pm 1)) \cdot \left(\frac{d}{dz} \sin\left(\frac{\pi}{z}\right)\right)\Big|_{z=\pm 1} + O\left((z-(\pm 1))^2\right)$$

$$= \left(z-(\pm 1)\right)\left(-\frac{\pi}{z^2}\cos\left(\frac{\pi}{z}\right)\right)\Big|_{z=\pm 1} + O\left(\left(z-(\pm 1)\right)^2\right)$$

$$= \pi\left(z-(\pm 1)\right) + O\left(\left(z-(\pm 1)\right)^2\right)$$

$\Rightarrow$ la funzione ha un polo semplice in $z=\pm 1$ con residuo $Res(\pm 1) = \frac{\pi}{(z+(\pm 1))^2}\Big|_{z=\pm 1} = \frac{\pi}{4}$.

Attorno a $z=\infty$:

$\frac{1}{z^4}\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)\frac{1}{\left(1-\frac{1}{z^2}\right)^2}$ $\rightarrow$ scrivendola in questo modo, notiamo che sia $\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)$ che $\frac{1}{\left(1-\frac{1}{z^2}\right)^2}$ hanno solo potenze negative di z nel loro sviluppo per grande z

$\Rightarrow$ $z=\infty$ è un punto regolare.

Il residuo potrebbe comunque essere $\neq 0$ se ci fosse una potenza $\frac{1}{z}$ nello sviluppo per grandi z; però notiamo che la potenza più bassa è:

$$\frac{1}{z^4}\left(\frac{\pi}{z} + O\left(\frac{1}{z^3}\right)\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right) = \frac{\pi}{z^5}\left(1+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right)$$

$\Rightarrow$ non c'è coefficiente di $\frac{1}{z}$ e $Res(\infty) = 0$.

Attorno a $z=0$: $\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)$ ha infinite potenze negative

$\Rightarrow$ è una singolarità essenziale.

Notiamo che però $\frac{1}{(1-z^2)^2}$, contrariamente a quanto succedere per $z=\infty$, ha solo potenze positive di z.

Per calcolare il residuo possiamo usare due metodi:

1) Sommare la serie:

$$\sin\left(\frac{\pi}{z}\right) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{1}{(2k_1+1)!} (-1)^{k_1} \left(\frac{\pi}{z}\right)^{2k_1+1}$$

$$\frac{1}{(1-z^2)^2} = \sum_{k_2=0}^{\infty} \binom{-2}{k_2} (-1)^{k_2} z^{2k_2}$$

$$\left(\binom{-2}{k_2} = (-1)^{k_2} \binom{k_2-2+1}{k_2} = (-1)^{k_2}(k_2+1) \right)$$

$$= \sum_{k_2=0}^{\infty} (k_2+1) z^{2k_2}$$

Prodotto: $\displaystyle\sum_{k_1,k_2=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k_1}(k_2+1)\pi^{2k_1+1}}{(2k_1+1)!} z^{2(k_2-k_1)-1}$

$\Rightarrow$ per avere $\frac{1}{z}$ dobbiamo restringerci a $k_2=k_1$

e il coefficiente è la somma infinita:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+1)\pi^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$\rightarrow$ questa risposta sarebbe accettabile senza calcolare la serie

Per calcolarla usiamo che: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(k+1)}{(2k+1)!} x^{2k+1}$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} \frac{d}{dx} x^{2k+2}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d}{dx}\left(x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(x \sin x\right)$$

$= \frac{1}{2}(\sin x + x\cos x)$

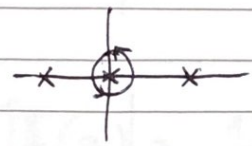
La serie originale si ottiene sostituendo $x = \pi$

$\Rightarrow \text{Res}(z=0) = \frac{1}{2}(\sin\pi + \pi\cos\pi) = -\frac{\pi}{2}$

2) Usare il teorema esterno dei residui:

$$\text{Res}(z=0) = \oint_{z=0} dz \frac{\sin\frac{\pi}{z}}{(1-z^2)^2} = -\text{Res}(+1) - \text{Res}(-1)$$

$$= -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}.$$



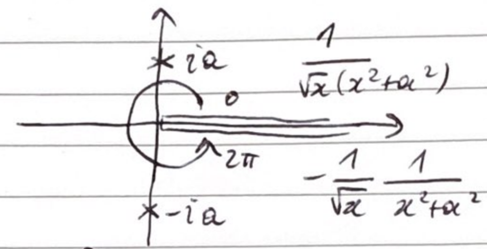
[Nota: in generale per una funzione che ha solo singolarità isolate su $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, deve valere:

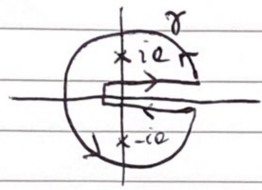
$$\sum_{z_i} \text{Res}(z_i) = 0 \qquad z_i \text{ singolarità isolate, incluso } \infty$$

Quindi basta calcolare i residui in tutte le singolarità tranne 1 per saperli tutti].

$$\int_0^\infty dx \, \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{x^2+a^2} \quad , \; a \in \mathbb{R}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}\,(z^2+a^2)}$$





$$\oint_\gamma dz \, f(z) = 2\int_0^R dx \, \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{x^2+a} + \int_{\gamma_R} dz \, f(z)$$

$|f(z)| \sim \frac{1}{|z|^{5/2}}$ per $|z| \to \infty \Rightarrow$ possiamo mandare $R \to \infty$ e buttare via l'integrale sull'arco.

$$\Rightarrow \int_0^\infty dx \, \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{x^2+a^2} = \frac{1}{2} \oint_\gamma dz \, f(z) = \frac{1}{2}(2\pi i)\Big(\mathrm{Res}_f(i|a|) + \mathrm{Res}_f(-i|a|)\Big)$$

$$= \pi i \left(\frac{1}{2i|a|} \frac{1}{\sqrt{i|a|}} + \frac{1}{-2i|a|} \frac{1}{\sqrt{-i|a|}} \right)$$

Con la nostra scelta, $\mathrm{Arg}(\sqrt{z})$ è tra 0 e π,

quindi: $\sqrt{i} = \sqrt{e^{i\pi/2}} = e^{i\pi/4}$

$$\sqrt{-i} = \sqrt{e^{-i\pi/2}} = \sqrt{e^{i3\pi/2}} = e^{i3\pi/4}$$

$$= \frac{\pi i}{2i|a|\sqrt{|a|}} \left(e^{-i\pi/4} - e^{-i3\pi/4} \right)$$

$$= \frac{\pi}{2|a|\sqrt{|a|}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}\,|a|\sqrt{|a|}} .$$