Esercizi di Geometria
Ingegneria Industriale e Navale 2019/2020 - ottavo foglio

November 17, 2019

1. Si consideri la retta del piano affine $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$:
$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \end{cases}$$
   - Si dimostri che il punto $(0, -2) \in r$;
   - sia W la giacitura di r; si dimostri che il vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \in W$;
   - si dimostri che la retta di equazioni parametriche
$$\begin{cases} x = 3\tau \\ y = -2 + 6\tau \end{cases}$$
     coincide con r

2. Si determini un'equazione cartesiana della retta in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ passante per i punti P e Q in ognuno dei casi seguenti:
   (a) $P = (1, -1)$, $Q = (3, 2)$;
   (b) $P = (2, 0)$, $Q = (-1, -1)$;
   (c) $P = (0, 0)$, $Q = (0, 8)$.

3. Si determinino delle equazioni parametriche per la retta in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ parallela al vettore v e passante per il punto $r \cap s$ in ciascuno dei casi seguenti:
   (a) $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $r:\ 3x_1 - 2x_2 = 7$, $s:\ 2x_1 + 3x_2 = 0$;
   (b) $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -18 \end{pmatrix}$, $r:\ x_1 - x_2 = 5$, $s:\ x_1 + x_2 = 1$.

4. Si determinino delle equazioni cartesiane e parametriche dei piani paralleli al piano coordinato xy, di equazione cartesiana
$$z = 0.$$
   Analogamente, si determinino delle equazioni cartesiane e parametriche dei piani paralleli ai piani coordinati yz e xz.

5. Si determini un'equazione cartesiana del piano in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ contenente il punto $Q = (-1, 0, 1)$ e parallelo al piano
$$2x_1 - x_3 = \frac{2}{3}.$$

6. Sia $Q \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ un punto e sia $W = \mathrm{Span}(v_1, v_2)$ un piano vettoriale, con v_1, v_2 linearmente indipendenti.

   Si dimostri che se Q' è un punto tale che
$$Q\vec{Q'} \in W$$
   e w_1, w_2 sono un'altra base di W:
$$W = \mathrm{Span}(w_1, w_2),$$
   allora il piano affine determinato da Q, v_1, v_2 eil piano affine determinato da Q', w_1, w_2 coincidono.

   Un piano affine non dipende, quindi, dalla scelta del punto base e dalla scelta di una base della giacitura.

   Ciò vale, in realtà, per tutti i sottospazi affini.

7. In ciascuno dei seguenti casi determinare equazioni parametriche e cartesiane della retta in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ passante per il punto P e parallela al vettore v:

   (a) $P = (-10, -10, 10), \;\; v = \begin{pmatrix} 10 \\ -18 \\ 3 \end{pmatrix}$

   (b) $P = (-1, -1, -2), \;\; v = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

   (c) $P = (7, 1, -1), \;\; v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

8. Due rette r ed s di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si dicono complanari se esiste un piano $\pi \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ che le contiene:
$$r \subset \pi, \quad s \subset \pi.$$
   In ciascuno dei seguenti casi verificare se le rette r ed s di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono o no complanari. Nel caso affermativo si dica se sono parallele o incidenti.

   (a)
$$r : \begin{cases} x_1 &= 1 + t \\ x_2 &= 2t \\ x_3 &= 8 - t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x_1 &= 1 - \tau \\ x_2 &= 3 + \tau \\ x_3 &= 5\tau \end{cases}$$

(b)

$$r:\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & 6+2t \\ x_2 & = & 3+2t \\ x_3 & = & 2t \end{array}\right. \qquad s:\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & \tau \\ x_2 & = & \tau \\ x_3 & = & \tau \end{array}\right.$$

(c)

$$r:\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & 6 \\ x_2 & = & 1-2t \\ x_3 & = & 8-t \end{array}\right. \qquad s:\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & \tau \\ x_2 & = & -5+\tau \\ x_3 & = & 2+\tau \end{array}\right.$$

9. Determinare un'equazione cartesiana del piano in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ contenente la retta di equazioni cartesiane

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=3 \\ 2y+3z=4 \end{array}\right.$$

e parallelo al vettore $v=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

10. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, si considerino i punti

$$P=(0,-1,1), \quad Q=(0,1,1), \quad R_a=(a,0,0),$$

al variare del parametro $a\in\mathbb{R}$. Per ogni $a\in\mathbb{R}$, si determini il piano affine L_a passante per P, Q ed R_a. Si determini $a\in\mathbb{R}$ tale che il piano L_a sia parallelo alla retta affine r di equazioni cartesiane

$$\left\{\begin{array}{r} y=3 \\ x+z=0. \end{array}\right.$$

11. Per ogni valore del parametro $a\in\mathbb{R}$ si determinino equazioni parametriche e cartesiane della retta $r_a\subseteq\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ passante per i punti $P=(1,1,1)$ e $Q_a=(2,0,a)$.

Per quali $a\in\mathbb{R}$ la retta r_a è parallela al piano S di equazione cartesiana $2x-y+3z=1$?

12. Nello spazio $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino le rette

$$r_1:\quad\left\{\begin{array}{c} x+2y=a \\ z=0. \end{array}\right. \qquad r_2:\quad\left\{\begin{array}{c} x-y=1 \\ 2x+z=0. \end{array}\right.$$

al variare del parametro $a\in\mathbb{R}$. Per quali valori di $a\in\mathbb{R}$ le rette r_1 e r_2 sono complanari? Per ogni tale a si dica se r_1 ed r_2 sono incidenti oppure no.

13. Nello spazio $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino i punti $P=(1,1,0)$, $P'=(1,2,3)$, ed i vettori $v=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$, $v'=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Sia r la retta passante per P e con giacitura $\mathrm{Span}(v)$ e sia r' la retta passante per P' e con giacitura $\mathrm{Span}(v')$.

Si dimostri che r ed r' sono sghembe.

Si determinino due piani paralleli π e π', tali che

$$r\subseteq\pi, \quad r'\subseteq\pi'.$$