

Università degli Studi di Trieste
Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Dipartimento di Ingegneria Navale, del Mare e per l'Ambiente
Sezione di Fisica Tecnica

Tesi di Laurea
in Fisica Tecnica

Simulazione numerica diretta di flussi turbolenti in sistemi di coordinate curvilinee

Laureando:
Enrico STALIO

Relatore:
Chiar.mo Prof. Enrico NOBILE

Anno Accademico 1997/98

in memoria
di Germano Sancin

Ringraziamenti

Desidero ringraziare tutti coloro che mi hanno aiutato nel lavoro per questa tesi: Alessandro, Massimo, Claudio e Gabriel dell'aula Sun; Marzio, il dott. Giorgio Moncalvo del Centro di Calcolo e Diego Soldano della *Silicon Graphics*.

Indice

Indice dei simboli	iii
Introduzione	v
1 Generazione di griglie	1
1.1 Caratteristiche delle griglie curvilinee	1
1.2 Spazio fisico e spazio trasformato	2
1.3 Le equazioni per griglie ortogonali	3
1.4 Scrittura delle equazioni lineari	4
1.5 Descrizione dell'algoritmo	6
1.6 La pratica della generazione di griglie	8
2 La soluzione numerica dell'equazione di Poisson	13
2.1 Il metodo dei volumi finiti	13
2.2 Forma continua e forma discreta	14
2.3 Le condizioni al contorno	18
2.3.1 Condizioni di Neumann	18
2.3.2 Condizioni di periodicità	19
2.4 Aspetto della matrice	21
3 Formulazione matematica	23
3.1 Le equazioni del moto	23
3.1.1 Il numero di Reynolds Re_τ	24
3.2 Il metodo di soluzione <i>projection</i>	25
3.2.1 Descrizione dell'algoritmo	29
3.2.2 Condizioni iniziali	30

3.3	Le equazioni del moto in forma discreta	31
3.3.1	Passaggio alla forma discreta nel tempo	31
3.3.2	Passaggio alla forma discreta nello spazio	32
3.3.3	Controllo dell'errore di massa	42
4	Canale tra lastre piane parallele	45
4.1	Raccolta delle grandezze statistiche	46
4.2	Simulazioni in regime laminare	47
4.3	Simulazioni in regime turbolento	49
4.3.1	Velocità media e legge logaritmica di parete	49
4.3.2	Tensione tangenziale turbolenta	50
4.3.3	Energia cinetica turbolenta	52
4.3.4	Calcolo della vorticità	52
5	Flusso sulle <i>riblet</i>	59
5.1	La riduzione della resistenza	59
5.2	Studio delle dimensioni ottimali	63
5.3	Simulazione del flusso sulle <i>riblet</i>	65
5.3.1	Raccolta delle grandezze statistiche	66
5.3.2	Risultati	67
5.4	Misura della resistenza	85
5.4.1	Valori di resistenza in regime laminare	85
5.4.2	Valori della resistenza in regime turbolento	87
5.5	Le <i>riblet</i> e la trasmissione del calore	88
5.6	Applicazioni delle <i>riblet</i>	89
A	Il <i>Poisson solver</i> in tre dimensioni	91
B	La tecnica BGE per la soluzione di sistemi lineari	99
C	Cenni di calcolo vettoriale	103
	Conclusioni	105

Indice dei simboli

\vec{a}_i, \vec{a}^i	i -esimo vettore della base covariante, controvariante
C_f	coefficiente d'attrito
c_p	calore specifico a pressione costante
$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$	versori delle coordinate locali ξ, η, ζ
F	funzione di distorsione
h, h^+	altezza adimensionale e in unità di parete di una scanalatura
h_p	altezza di protrusione
\mathbf{I}	matrice identità
k_t	energia cinetica turbolenta
l_x, l_y, l_z	dimensioni lungo x, y, z del dominio di calcolo
\mathbf{M}	matrice reale
$\mathcal{M}_{n \times m}$	insieme delle matrici reali di dimensione $n \times m$
\vec{n}	vettore normale esterno
n, m, p	numero dei nodi della griglia di calcolo
\mathcal{O}	ordine di grandezza
\mathcal{P}	operatore di proiezione in un sottospazio di vettori a divergenza nulla
p	pressione statica
\mathcal{Q}	operatore di proiezione in un sottospazio di vettori irrotazionali
q	flusso di calore
\vec{r}	vettore posizione $\vec{r} = (x, y, z)$
rhs	<i>right hand side</i> , parte destra di una equazione
S_z	superficie normale all'asse z
s, s^+	spessore adimensionale e in unità di parete di una scanalatura

T	temperatura, anche intervallo di tempo
t	tempo
u, v, w	componenti del vettore velocità
w'	velocità fluttuante o variazione di velocità
w_τ	velocità d'attrito
x, y, z	coordinate cartesiane
y^+	coordinata y in unità di parete ($= y w_\tau / \nu$)
α	angolo rispetto l'orizzontale delle <i>riblet</i>
Γ	bordo del dominio di calcolo
δ	scala per le lunghezze
ε_m	errore di massa
κ	costante di von Karman
Λ	matrice diagonale
λ_k	k -esimo autovalore
μ	viscosità dinamica
ν	viscosità cinematica
ξ, η, ζ	coordinate curvilinee
ρ	densità
τ_{ij}	tensione tangenziale turbolenta
ϕ	pseudopressione
$\varphi_{i,j,k}$	flusso del vettore velocità dalla cella (i, j, k)
Ω	dominio di calcolo
$\vec{\omega}$	vettore vorticità

Pedici

0	valore all'istante $t = 0$
f	valore riferito alla parete piana
r	valore riferito alla parete con le <i>riblet</i>
rms	<i>root mean square</i> , deviazione standard
w	valore valutato in prossimità della parete
∞	valore in condizioni indisturbate

Introduzione

La turbolenza è un fenomeno non stazionario, tridimensionale e caratterizzato da fluttuazioni casuali della velocità. A causa della complessità del moto turbolento, il campo di velocità e i fenomeni di trasporto della quantità di moto, della massa e del calore sono difficili da prevedere e da descrivere; d'altra parte molti sono i casi di interesse ingegneristico in cui è essenziale disporre di informazioni precise su quei fenomeni.

Il metodo più usato in passato per lo studio e la previsione dei moti turbolenti, è stato quello degli esperimenti eseguiti su modelli. Motivi di convenienza economica e la constatazione che l'esecuzione di misure dettagliate sono lunghe da portare a termine e che alcune misure non possono essere eseguite con precisione sufficiente, hanno convinto molti progettisti ad affidarsi all'analisi della turbolenza con metodi numerici.

I programmi commerciali di termo-fluidodinamica attualmente più diffusi nell'industria utilizzano metodi fondati sulla soluzione delle equazioni *Reynolds Averaged Navier-Stokes*, ottenute dalla media delle equazioni del moto nel tempo. Nell'operazione di media però si perdono tutte le informazioni sui transitori e quelle sull'evoluzione temporale delle strutture turbolente. Il sistema delle equazioni mediate inoltre non è un sistema chiuso cioè le equazioni non sono sufficienti a determinare tutte le incognite del problema. Per la chiusura del sistema viene introdotto un modello di turbolenza che però rende l'affidabilità del metodo dipendente dal particolare caso in studio.

Per questi motivi è generalmente accettata l'idea che nessun modello basato sulle equazioni mediate nel tempo può prevedere le grandezze caratteristiche del moto turbolento con una accuratezza sufficiente per

la gran parte degli usi ingegneristici.

Il modo corretto di trattare il problema della turbolenza è certamente quello di risolvere le equazioni di Navier-Stokes non stazionarie, in tre dimensioni, senza medie e senza approssimazioni oltre a quelle – che si possono stimare e tenere sotto controllo – legate al passaggio alla forma discreta e al metodo di soluzione. Il problema della simulazione numerica diretta (*Direct Numerical Simulation* – DNS) delle equazioni del moto è l'elevato costo, in termini di risorse di calcolo.

Con i mezzi tecnologici attuali si può applicare la simulazione numerica diretta a flussi con basso numero di Reynolds e in geometrie semplici senza incorrere in costi computazionali troppo elevati; la simulazione numerica diretta può aiutare a capire la fisica della turbolenza e può essere usata per regolare i modelli impiegati nei codici ma è ancora da vedere se si potrà utilizzare per flussi ad alto numero di Reynolds e geometrie complesse nella pratica della progettazione industriale.

È sotto i nostri occhi il notevole incremento delle prestazioni dei calcolatori di tutte le dimensioni: personal computer, *workstation*, *super-computer*, accompagnato da una progressiva riduzione del loro prezzo; questa considerazione, unita al fatto che anche gli algoritmi per la simulazione numerica dei fenomeni fisici sono in continuo progresso, consente per ora di formulare delle previsioni favorevoli.

In questo contesto si inserisce il lavoro svolto e qui descritto. Con le indispensabili indicazioni del mio relatore ho sviluppato un programma per la simulazione numerica diretta di correnti turbolente in geometrie complesse. I flussi di interesse ingegneristico infatti hanno luogo in domini che raramente sono rettangolari e su cui le griglie cartesiane non si possono adattare facilmente. Sarebbe più corretto, poiché le griglie su cui si eseguono i calcoli sono curvilinee e ortogonali su un piano ma cartesiane nella direzione normale a quel piano, affermare che le simulazioni avvengono su domini di forma *moderatamente complessa*. La realtà è ancora diversa, infatti non è richiesta la perfetta ortogonalità della griglia curvilinea: nonostante le equazioni discrete siano scritte sotto quell'ipotesi, il metodo di soluzione si è dimostrato stabile e accurato anche su griglie che in qualche nodo formano angoli ampi quarantacinque gradi.

Il programma è stato inizialmente utilizzato nella simulazione della corrente in un canale tra pareti piane parallele – un caso molto studiato,

di cui sono ben note le caratteristiche del moto – con l'intento di accertarne la stabilità e l'accuratezza nel caso particolare di griglie cartesiane nelle tre direzioni.

In seguito si è sfruttata la possibilità di eseguire i calcoli su griglie curvilinee e di assecondare in questo modo i contorni di un canale con delle scanalature longitudinali, le *riblet* che costituiscono un sistema passivo per la riduzione della resistenza a parete di correnti turbolente.

La disposizione degli argomenti in questa tesi rispetta l'ordine "cronologico" in cui sono stati affrontati. Nel primo capitolo si presentano gli aspetti fondamentali della generazione di griglie curvilinee ortogonali; nel secondo si introduce il metodo dei volumi finiti utilizzato per tradurre in forma discreta le equazioni del moto e si risolve il problema della soluzione per via numerica dell'equazione di Poisson. Nella forma tridimensionale, descritta in appendice A, la soluzione dell'equazione di Poisson è utile per risolvere, con il metodo *projection*, le equazioni del moto. Questo argomento è trattato nel terzo capitolo, dove si trovano anche i calcoli per il passaggio alla forma discreta nel tempo e nello spazio delle equazioni da risolvere, e viene affrontata la questione dell'avviamento del calcolo.

Nel quarto capitolo sono presentati i calcoli per la raccolta delle grandezze statistiche più importanti che descrivono le correnti turbolente e i risultati della simulazione della corrente in un canale tra lastre piane. Nel quinto capitolo si introduce l'argomento delle *riblet* come tecnica per la riduzione degli sforzi d'attrito a parete e vengono confrontate diverse interpretazioni del meccanismo di riduzione della resistenza; si presentano i risultati delle simulazioni condotte su quelle geometrie, si descrivono le più importanti applicazioni attuate finora, e si riporta qualche indicazione per il corretto dimensionamento delle *riblet*.

L'aspetto forse sorprendente (e ancora in attesa di essere verificato) che è emerso dagli studi sulle *riblet* è che quella particolare conformazione delle pareti, oltre a offrire poca resistenza al moto, sembra assicurare un coefficiente di scambio termico tra parete e fluido più elevato di quello caratteristico di una lastra piana. In questa direzione si svolgeranno le nostre future indagini: il codice di calcolo sarà ampliato con la soluzione dell'equazione di conservazione dell'energia e permetterà di studiare il

fenomeno da un punto di vista termo-fluidodinamico, essendo questo aspetto ancora scarsamente studiato ma di sicuro interesse.

L'estensione del codice alla simulazione di fenomeni di scambio termico avverrà nell'ambito di un accordo di programma tra ENEA, MURST e la sezione di Fisica Tecnica del Dipartimento di Ingegneria Navale, del Mare e per l'Ambiente dell'Università di Trieste per lo sviluppo e applicazioni di metodologie di calcolo termo-fluidodinamico nel settore dello scambio termico ad alte prestazioni.

Capitolo 1

Generazione di griglie

La soluzione numerica delle equazioni alle derivate parziali che descrivono i fenomeni della meccanica dei fluidi richiede la suddivisione del dominio in un insieme di *celle elementari*; questi elementi discreti sono definiti da una *griglia*. In questo capitolo riporto gli aspetti fondamentali della teoria della generazione di griglie bidimensionali, curvilinee, ortogonali, per domini semplicemente connessi, descritta più ampiamente in [1, 2].

1.1 Caratteristiche delle griglie curvilinee

Le *griglie curvilinee* hanno la proprietà di conformarsi ai bordi ¹, anche accidentati, delle regioni in cui sono definite le equazioni differenziali e permettono in questo modo di specificare precisamente le condizioni al contorno del problema.

Le griglie curvilinee sono *strutturate*; e cioè formate da famiglie di linee i cui membri intersecano tutti i membri delle altre famiglie una sola volta e non intersecano mai membri della loro stessa famiglia; questa proprietà permette di numerare tutte le linee in modo che ogni nodo della griglia (e ogni volume di controllo) sia univocamente definito, in uno spazio tridimensionale, da un vettore di tre indici. Le matrici che si devo-

¹Griglie con questa caratteristica si indicano in inglese con i termini “*boundary-fitted*” e “*boundary-conforming*”.

no risolvere su griglie di questo tipo, con i nodi numerati ordinatamente (ad esempio, su un piano, da sinistra a destra e dal basso verso l'alto) hanno strutture particolari che si possono sfruttare per semplificare la procedura di soluzione.

In questo lavoro si sono utilizzate griglie *ortogonali*; ciò significa che le linee di famiglie diverse sono perpendicolari tra loro: le equazioni da risolvere scritte su questo tipo di griglie contengono qualche termine in meno delle equazioni “non ortogonali” con il pregio di rendere meno complesso il calcolo e di limitare la difficoltà di programmazione.

1.2 Spazio fisico e spazio trasformato

La generazione di una griglia curvilinea richiede la definizione di un sistema di coordinate curvilinee (ξ, η) tale che i bordi della regione coincidano con una linea a ξ o a η costante e che ci sia corrispondenza biunivoca tra i punti (x, y) di un sistema di riferimento globale di coordinate cartesiane e i punti (ξ, η) . La definizione del nuovo sistema di coordinate o meglio delle funzioni biettive $\xi(x, y)$ e $\eta(x, y)$ che lo determinano può esser vista come una trasformazione dello spazio fisico in uno *spazio computazionale* o *trasformato* dove le celle e lo stesso dominio sono tutti rettangolari, a prescindere dalle loro forme nello spazio fisico. Nel nuovo sistema di

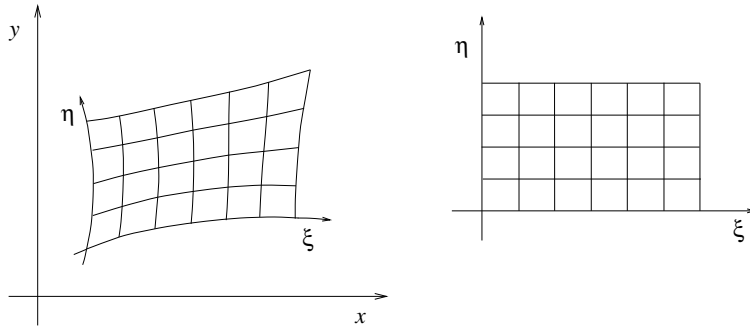


Figura 1.1: Spazio fisico e spazio trasformato.

coordinate, una griglia di $n \times m$ nodi è costituita da n linee a η costante e m linee a ξ costante.

In un sistema di coordinate curvilinee, lungo una linea a ξ_i costante la coordinata ξ_j deve variare in modo monotono (la condizione è necessaria perché la trasformazione sia biunivoca) e tra gli stessi limiti di variazione di ogni altra linea a ξ_i costante ma non c'è restrizione sull'entità della variazione nei singoli tratti, proprio come una rappresentazione in coordinate cartesiane può avvenire in diverse scale, anche non lineari. Questo permette di definire delle griglie in cui gli incrementi delle coordinate curvilinee tra nodo e nodo siano, per semplicità, costanti,

$$\begin{cases} \Delta \xi_i = \Delta \xi & (i = 1, \dots, n-1) \\ \Delta \eta_i = \Delta \eta & (j = 1, \dots, m-1) \end{cases}$$

eguali in ogni direzione e unitari $\Delta \xi = \Delta \eta = 1$.

1.3 Le equazioni per griglie ortogonali

Risolvere il problema della generazione di una griglia in un dominio bidimensionale consiste nella determinazione dei valori $x(i, j)$ e $y(i, j)$ che forniscono la posizione, rispetto un sistema globale di coordinate cartesiane, dei nodi della griglia. La soluzione dell'equazione di Laplace ²:

$$\nabla^2 \vec{r} = 0 \quad (1.1)$$

con \vec{r} vettore posizione $\vec{r} = (x, y)$, fornisce due funzioni $x(\xi, \eta)$ e $y(\xi, \eta)$ le cui inverse $\xi(x, y)$ e $\eta(x, y)$ hanno le linee a ξ costante e quelle a η costante ortogonali tra loro (rappresentano il potenziale cinetico e la funzione di flusso del campo di moto irrotazionale di un fluido incomprimibile entro quel dominio), curvature dolci, andamenti regolari. Questo tipo di sistema di generazione si chiama in letteratura *sistema di generazione ellittico*.

Si tratta ora di esprimere l'equazione di Laplace nello spazio trasformato; il procedimento seguito in [1] consiste nel ricavare delle *relazioni di trasformazione* dalle coordinate cartesiane a quelle curvilinee che

²In molti testi si legge $\nabla \times \phi$ per $rot(\phi)$, $\nabla \cdot \phi$ per $div(\phi)$ e $\nabla \phi$ per $grad(\phi)$; per chiarezza riserverò il simbolo ∇ per indicare l'operazione di gradiente e il laplaciano $\nabla^2 \phi$ per $div(grad(\phi))$.

esprimono gli operatori differenziali (il laplaciano, nel nostro caso) nello spazio trasformato: le derivate nelle coordinate cartesiane diventano in questo modo derivate nelle coordinate curvilinee.

La trasformazione richiede alcune definizioni preliminari; nei sistemi di coordinate curvilinee, si definiscono localmente una *base covariante* e una *base controvariante*; le componenti dei vettori espressi in una base covariante sono valutate lungo le coordinate locali mentre i vettori di una base controvariante sono perpendicolari ad esse. Sia ξ una ascissa curvilinea; il vettore tangente alla coordinata ξ in $\vec{r} = (x, y)$ è $\partial\vec{r}/\partial\xi$ e la base covariante:

$$\vec{a}_i = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi_i} \quad (i = 1, 2)$$

L' i -esimo vettore della base controvariante deve essere perpendicolare al piano $\xi_i = \text{cost}$ perciò la base controvariante:

$$\vec{a}^i = \nabla\xi_i \quad (i = 1, 2)$$

Se g_{11} e g_{22} sono gli elementi della diagonale del *tensore metrico covariante* $g_{ij} = \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j$ (gli unici non nulli in un sistema ortogonale di coordinate), e si definisce una *funzione di distorsione*:

$$F = \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} \quad (1.2)$$

l'equazione 1.1 si scrive nello spazio trasformato:

$$\frac{\partial}{\partial\xi} \left(F \frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi} \right) + \frac{\partial}{\partial\eta} \left(\frac{1}{F} \frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta} \right) = 0 \quad (1.3)$$

Tutti i passaggi che conducono alla 1.3 e una trattazione teorica più approfondita si trovano in [1].

1.4 Scrittura delle equazioni lineari

Il metodo delle differenze finite, che considera il valore delle incognite nei nodi della griglia, è sicuramente il più adatto alla rappresentazione del problema della generazione di griglie in cui le incognite sono le posizioni dei nodi.

Consideriamo prima di tutto la funzione di distorsione F . Se si tiene conto della 1.2 e della definizione di tensore metrico covariante si ottiene:

$$F = \sqrt{\frac{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2}{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2}}$$

Un'approssimazione del secondo ordine della funzione di distorsione viene calcolata nel punto P dalle coordinate dei quattro punti adiacenti secondo il metodo delle *differenze centrali*. Per il fatto che abbiamo a

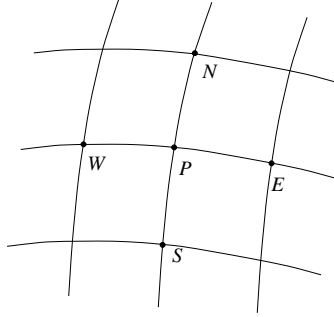


Figura 1.2: Molecola di calcolo nello spazio fisico.

che fare, nello spazio trasformato, con griglie a spaziatura costante e per di più unitaria nelle due direzioni, l'espressione discreta della funzione di distorsione, nel punto interno P , con la notazione della figura 1.2, è semplicemente:

$$F_P = \sqrt{\frac{(x_N - x_S)^2 + (y_N - y_S)^2}{(x_E - x_W)^2 + (y_E - y_W)^2}} \quad (1.4)$$

La 1.4 chiarisce il significato della funzione F e come essa sia legata all'aspetto della griglia attorno al punto P ; per questo motivo in alcuni testi essa viene indicata con il nome *grid aspect ratio*.

L'espressione discreta della 1.3, scritta nel generico punto interno P secondo il metodo delle differenze centrali e con una approssimazione delle derivate del secondo ordine si scrive per l'incognita x :

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{F_P^2} \left(\frac{F_N - F_S}{4} + F_P \right) \right] x_S + \left(\frac{F_W - F_E}{4} + F_P \right) x_W - \\ & - \left[2 \left(\frac{1}{F_P} + F_P \right) \right] x_P + \left(\frac{F_E - F_W}{4} + F_P \right) x_E + \\ & + \left[\frac{1}{F_P^2} \left(\frac{F_S - F_N}{4} + F_P \right) \right] x_N = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

La matrice del sistema di equazioni lineari che risolve la 1.5 per ogni punto interno della griglia è pentadiagonale, simmetrica, di dimensione pari al numero di nodi la cui posizione nello spazio fisico è incognita; separatamente bisogna risolvere un sistema di equazioni del tutto simile anche per l'incognita y .

1.5 Descrizione dell'algoritmo

La generazione di una griglia tramite la soluzione delle equazioni discrete 1.5 può avvenire in due diversi modi. Si può operare secondo il metodo *strong constraint* e specificare il valore della funzione di distorsione $F(i, j)$ dall'inizio, quindi generare la griglia risolvendo una sola volta le equazioni 1.5 oppure, secondo il metodo *weak constraint*, F può essere valutata in modo iterativo, dai valori $x(i, j)$ e $y(i, j)$ calcolati all'iterazione precedente.

Visto il significato della funzione di distorsione, si capisce che il metodo *strong constraint* non permette di fissare la posizione dei nodi sui bordi della griglia (il problema sarebbe impossibile), mentre il metodo *weak constraint* lo richiede.

Poiché è importante ottenere una griglia in cui la distribuzione delle linee sia più fitta nelle zone di ampia variazione delle incognite e in generale controllare l'aspetto della griglia tramite la distribuzione dei nodi sul bordo, l'algoritmo utilizzato per la scrittura del programma di generazione di griglie determina iterativamente il valore di $F(i, j)$ e la posizione dei punti della griglia $\xi(i, j)$ e $\eta(i, j)$ secondo lo schema:

1. Scelta la distribuzione dei punti sui bordi, fissa un valore iniziale per $x(i, j)$ e $y(i, j)$ dei nodi interni
2. calcola F in tutto il campo secondo la 1.4
3. risolvi l'equazione fondamentale 1.5 e l'analoga per la coordinata y utilizzando i valori di F calcolati al passo 2
4. se il processo iterativo non è giunto a convergenza, ritorna al passo 2

Per quanto riguarda il controllo della convergenza, si può tener conto della grandezza:

$$\Delta = \frac{\sum_{i,j} \sqrt{(x(i,j) - x'(i,j))^2 + (y(i,j) - y'(i,j))^2}}{n \cdot m \cdot \sqrt{(x(n,m) - x(1,1))^2 + (y(n,m) - y(1,1))^2}}$$

da calcolare a ogni iterazione con i valori attuali $x(i, j)$ e $y(i, j)$ e quelli dell'iterazione precedente $x'(i, j)$ e $y'(i, j)$: si deve osservare che, con il progredire del calcolo, essa decresce in modo monotono fino a valori dell'ordine di 10^{-7} .

Le condizioni al contorno

Sotto le ipotesi *weak constraint* i punti sul bordo sono assegnati e costituiscono le condizioni al contorno del problema; perciò quando si scrivono la 1.5 e l'analoga per la coordinata y sui punti adiacenti a quelli del bordo, i termini con le coordinate dei punti sul bordo vanno, alla destra dell'equazione, a far parte dei termini noti.

Le condizioni iniziali

Siccome l'algoritmo è di tipo iterativo, è necessario fissare delle condizioni iniziali, cioè dei valori $x(i, j)$ e $y(i, j)$ per tutti i nodi interni della

griglia, a questo scopo è sufficiente calcolare $x(i, j)$ e $y(i, j)$ dalle:

$$\frac{x(i, j) - x(1, j)}{x(n, j) - x(1, j)} = \frac{(i - 1)}{(n - 1)}$$

$$\frac{y(i, j) - y(i, 1)}{y(i, m) - y(i, 1)} = \frac{(j - 1)}{(m - 1)}$$

1.6 La pratica della generazione di griglie

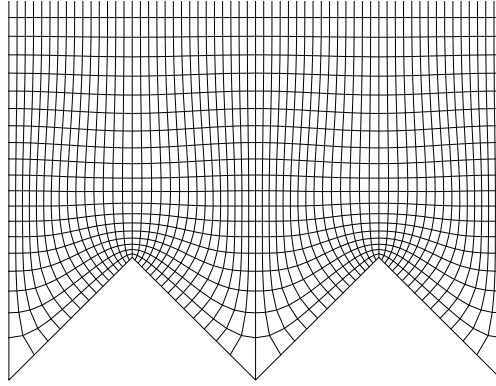


Figura 1.3: Particolare di griglia per il canale con le *riblet*

Nella pratica della generazione di griglie bisogna anzitutto tener conto del fatto che nei centri delle celle, nei nodi o sulle facce saranno valutate le velocità della corrente e le pressioni e vi si approssimeranno le derivate e i flussi, perciò la griglia deve essere più fitta nelle zone di ampia variazione delle incognite (ad esempio in prossimità delle pareti oppure nelle vicinanze di un getto) e conviene fare in modo che una famiglia di linee della griglia segua le linee di corrente. Si consiglia inoltre di non generare griglie in cui le dimensioni di due celle adiacenti siano troppo diverse tra loro.

In casi come il nostro, in cui il metodo di soluzione non tiene conto dei termini “non ortogonali” bisogna naturalmente fare attenzione a non allontanarsi eccessivamente dall’ipotesi di ortogonalità. Si osservi a questo proposito che se si utilizza il metodo dei volumi finiti, non importa strettamente l’ortogonalità dei vertici dei volumi di controllo; per i calcoli dei flussi di velocità e delle derivate della pressione (che viene valutata nei centri delle celle) quello che importa è piuttosto l’angolo tra la linea che congiunge i centri di due celle adiacenti e il vettore normale alla faccia in comune.

Il mancato rispetto di queste indicazioni o irregolarità anche piccole, appena apprezzabili a occhio, possono avere conseguenze negative non solo sull’accuratezza ma anche sulla stabilità del calcolo e la generazione di una griglia può diventare un compito lungo e difficile. In [3] si legge a questo proposito: “quando la geometria è complessa [. . .] non è raro che un progettista impieghi diverse settimane per generare una sola griglia; poiché l’accuratezza della soluzione dipende tanto dalla qualità della griglia quanto dalle approssimazioni usate per il passaggio alla forma discreta (se non di più), la cura della griglia ripagherà gli sforzi fatti”.

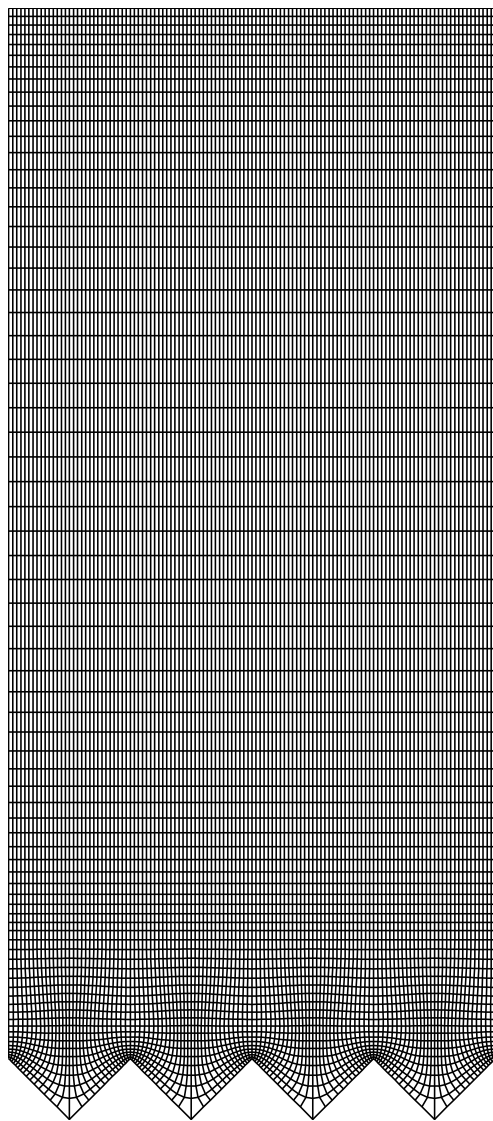


Figura 1.4: Griglia di calcolo 121×74 per il canale con quattro *riblet*.

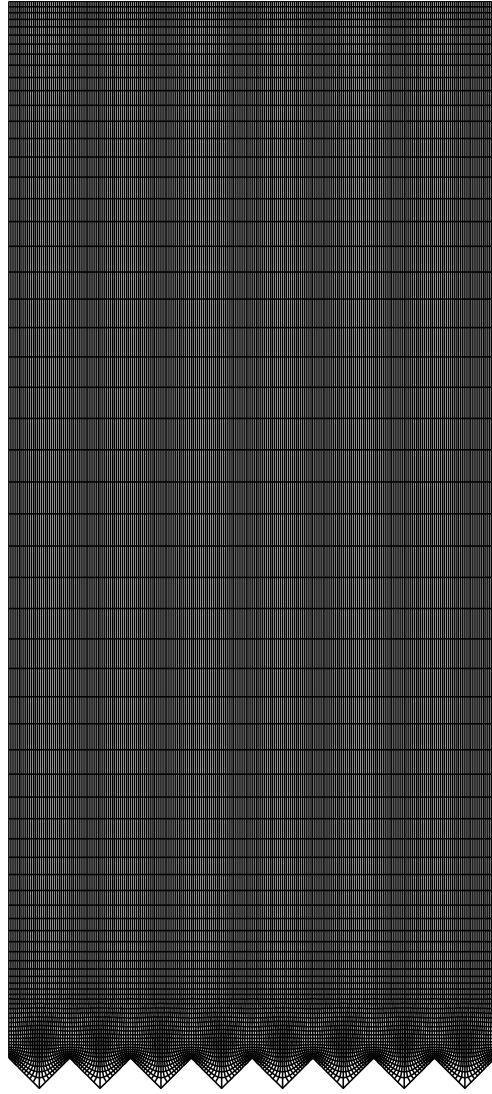


Figura 1.5: Griglia di calcolo 241×74 per il canale con otto *riblet*.

Capitolo 2

La soluzione numerica dell'equazione di Poisson

Il metodo *projection* di soluzione delle equazioni di Navier-Stokes richiede, per il calcolo del campo di pressione e la determinazione di un campo di velocità conservativo, la soluzione di un'equazione di Poisson a ogni passo di tempo. In questo capitolo affronto il problema della soluzione numerica dell'equazione di Poisson in domini bidimensionali e griglie curvilinee ortogonali; queste considerazioni saranno estese al caso tridimensionale nell'appendice A.

2.1 Il metodo dei volumi finiti

Le scelte preliminari che si devono affrontare nello studio con metodi numerici dei fenomeni fisici riguardano il modello matematico (comprende il sistema di equazioni differenziali e le condizioni al contorno), il metodo di soluzione delle equazioni (le approssimazioni per rendere meno complesso il calcolo) e il passaggio alla forma discreta. Per quanto riguarda il passaggio alla forma discreta esistono diversi approcci i più importanti dei quali sono i metodi delle *differenze finite*, dei *volumi finiti*, degli *elementi finiti* e i *metodi spettrali*.

Le equazioni della termo-fluidodinamica derivano dall'applicazione delle leggi di conservazione della quantità di moto, della massa, dell'ener-

gia a un volume di controllo finito; il passaggio al limite per le dimensioni tendenti a zero del volume di controllo conduce alle equazioni differenziali del moto e dell'energia. Quando si utilizza il metodo dei volumi finiti, a differenza degli altri metodi, le equazioni da scrivere in forma discreta sono le equazioni di conservazione nella loro forma integrale cioè prima del passaggio al limite: è per questo che le equazioni ottenute con il metodo dei volumi finiti assicurano la conservazione su scala locale della quantità di moto, della massa, dell'energia, indipendentemente dalle dimensioni della cella.

Non appena si consideri che il flusso uscente da una faccia di una cella è calcolato nello stesso modo del flusso entrante, dalla stessa faccia, nella cella adiacente si può concludere che anche la conservazione globale è assicurata.

Il vantaggio di un metodo “conservativo” discende dal fatto che se nella valutazione numerica delle equazioni differenziali, si rispettano le leggi di conservazione del fenomeno fisico che si sta studiando, si impone un vincolo all'errore nella soluzione del problema; infatti, quando la conservazione della massa, della quantità di moto, dell'energia sono assicurate, un errore può consistere solamente in una non esatta distribuzione di quelle quantità nel campo.

2.2 Forma continua e forma discreta

Ci proponiamo di scrivere in forma discreta, secondo il metodo dei volumi finiti, l'equazione di Poisson:

$$\nabla^2 \phi = c \quad (2.1)$$

definita in un dominio bidimensionale Ω in un sistema di coordinate curvilinee ortogonali:

$$\Omega = \{ \xi, \eta : \xi \in [\xi_{min}, \xi_{max}], \eta \in [\eta_{min}, \eta_{max}] \}$$

Il problema viene risolto con condizioni al contorno di Neumann sui bordi a η costante e condizioni di periodicità sui bordi a ξ costante; quando si impongono condizioni al contorno di questo tipo, sussiste la condizione

per l'esistenza della soluzione:

$$\int_{\Omega} c \, dS = 0$$

e la funzione incognita ϕ è definita a meno di una costante.

L'integrazione della 2.1 nel caso bidimensionale avviene sulla superficie S della cella generica

$$\int_S \nabla^2 \phi \, dS = \int_S c \, dS$$

il teorema della divergenza di Gauss-Green ci permette di calcolare il flusso attraverso una linea anziché l'integrale su una superficie

$$\int_l \nabla \phi \cdot \vec{n} \, dl = \int_S c \, dS \quad (2.2)$$

Queste equazioni sono ancora in una forma *coordinate free* cioè slegate dal particolare sistema di riferimento, si pone adesso il problema della scelta di un sistema di riferimento per la scrittura in forma discreta. Se si adottasse un sistema globale e per semplicità cartesiano, i flussi tra cella e cella sarebbero in generale esprimibili come un vettore di due componenti ma, siccome abbiamo a che fare con una griglia ortogonale, lungo le coordinate curvilinee locali i flussi hanno una sola componente non nulla e risulta evidente la convenienza di esprimere le grandezze vettoriali lungo quelle coordinate.

Se si esprime il flusso uscente dell'incognita ϕ come somma dei flussi da ciascun lato di una cella di dimensione infinitesima, si ottiene l'equazione:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_s d\xi_s + \left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_w d\eta_w + \left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_e d\eta_e + \left. \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_n d\xi_n = c \, dS \quad (2.3)$$

la variabile ϕ , come è illustrato nella figura 2.1, è definita nel centro di ogni cella; l'equazione che esprime il valore dell'incognita ϕ nel centro di una generica cella interna (i, j) in funzione dei valori della ϕ nelle

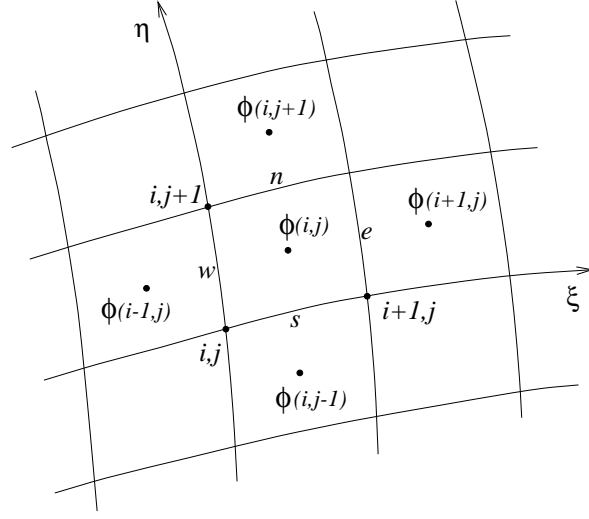
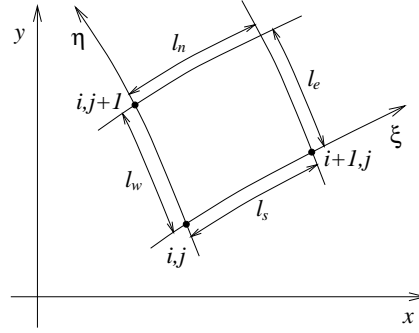


Figura 2.1: Punti di valutazione della variabile ϕ

quattro celle adiacenti è, secondo le notazioni della figura 2.2, con una approssimazione del secondo ordine delle derivate:

$$\begin{aligned}
 & 2 \frac{l_s(i,j)}{l_\eta(i,j) + l_\eta(i,j-1)} (\phi(i,j-1) - \phi(i,j)) + \\
 & + 2 \frac{l_w(i,j)}{l_\xi(i,j) + l_\xi(i-1,j)} (\phi(i-1,j) - \phi(i,j)) + \\
 & + 2 \frac{l_e(i,j)}{l_\xi(i,j) + l_\xi(i+1,j)} (\phi(i+1,j) - \phi(i,j)) + \\
 & + 2 \frac{l_n(i,j)}{l_\eta(i,j) + l_\eta(i,j+1)} (\phi(i,j+1) - \phi(i,j)) = \\
 & = c(i,j) S(i,j)
 \end{aligned}$$

Le dimensioni delle celle sono calcolate come distanze nel sistema di


 Figura 2.2: Dimensioni della cella (i, j)

riferimento cartesiano:

$$l_s(i, j) = \sqrt{(x(i+1, j) - x(i, j))^2 + (y(i+1, j) - y(i, j))^2}$$

$$l_w(i, j) = \sqrt{(x(i, j+1) - x(i, j))^2 + (y(i, j+1) - y(i, j))^2}$$

relazioni simili a queste valgono per $l_e(i, j)$ e $l_n(i, j)$; non sono indispensabili poiché $l_e(i, j) = l_w(i+1, j)$ e $l_n(i, j) = l_s(i, j+1)$ ma rendono più chiara la trattazione. Si definisce ancora:

$$l_\xi(i, j) = \frac{l_s(i, j) + l_n(i, j)}{2} ; \quad l_\eta(i, j) = \frac{l_w(i, j) + l_e(i, j)}{2}$$

L'elemento di superficie si calcola: $S(i, j) = l_\xi \cdot l_\eta$; per una maggior precisione si può valutare $S(i, j)$ come prodotto vettoriale dei lati sud e ovest della cella oppure come la metà del prodotto vettoriale delle due diagonali.

Se si raccolgono le incognite ϕ dell'espressione discreta dell'equazione di Poisson si ottiene l'equazione ¹ da risolvere per la generica cella

¹Si utilizza in questa equazione e nel seguito una notazione compatta per cui la scrittura $A_{p_{i,j}}$ equivale alla $A_p(i, j)$ come pure sono equivalenti $l_\xi(i, j)$ e $l_{\xi,i,j}$ eccetera

interna (i, j)

$$A_{s_{i,j-1}}\phi(i, j-1) + A_{w_{i-1,j}}\phi(i-1, j) + A_{p_{i,j}}\phi(i, j) + \\ + A_{e_{i+1,j}}\phi(i+1, j) + A_{n_{i,j+1}}\phi(i, j+1) = Q_{i,j} \quad (2.4)$$

in cui si sono definiti i coefficienti:

$$A_{s_{i,j-1}} = 2 \frac{l_s(i, j)}{l_\eta(i, j) + l_\eta(i, j-1)} ; \quad A_{w_{i-1,j}} = 2 \frac{l_w(i, j)}{l_\xi(i, j) + l_\xi(i-1, j)} \\ A_{e_{i+1,j}} = 2 \frac{l_e(i, j)}{l_\xi(i, j) + l_\xi(i+1, j)} ; \quad A_{n_{i,j+1}} = 2 \frac{l_n(i, j)}{l_\eta(i, j) + l_\eta(i, j+1)} \\ A_{p_{i,j}} = - (A_{s_{i,j-1}} + A_{w_{i-1,j}} + A_{e_{i+1,j}} + A_{n_{i,j+1}}) ; \quad Q_{i,j} = c(i, j) S(i, j)$$

2.3 Le condizioni al contorno

Le equazioni discrete presentate finora valgono per le celle interne al dominio; per scrivere le equazioni per le celle disposte sul bordo del campo si deve tener conto delle condizioni al contorno. In previsione delle applicazioni cui è destinato il codice, le condizioni al contorno applicate sul piano (ξ, η) sono condizioni di tipo Neumann (condizioni sulla derivata della variabile) sui bordi a η costante e condizioni di periodicità lungo i bordi a ξ costante.

2.3.1 Condizioni di Neumann

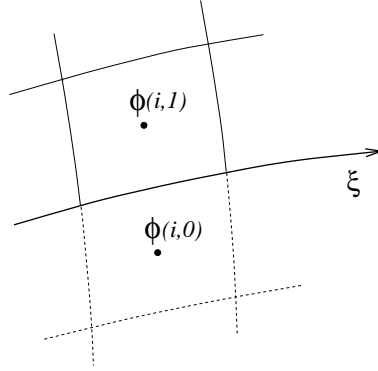
Sui bordi a η costante si impone l'annullamento della derivata normale alla parete $\partial\phi/\partial\vec{n} = 0$; poiché la griglia è ortogonale l'espressione si semplifica:

$$\frac{\partial\phi}{\partial\eta} = 0$$

in termini finiti:

$$\begin{cases} \phi(i, 0) = \phi(i, 1) & (i = 1, \dots, n-1) \\ \phi(i, m) = \phi(i, m-1) & (i = 1, \dots, n-1) \end{cases}$$

L'equazione per le celle $(i, 1)$ sul bordo con $\eta = 0$ è ancora la 2.4 non appena si imponga $A_{s_{i,0}} = 0$ e $A_{p_{i,1}}$ si modifichi di conseguenza:


 Figura 2.3: Cella sul bordo $\eta = 0$

$A_{pi,1} = -(A_{wi-1,1} + A_{ei+1,1} + A_{ni,2})$; in modo del tutto analogo la 2.4 con $A_{ni,m} = 0$ vale per le celle $(i, m-1)$.

2.3.2 Condizioni di periodicità

L'imporre condizioni periodiche sui bordi a ξ costante di un dominio di estensione finita consente di trovare una soluzione su un dominio di estensione infinita in direzione ξ , che è il prolungamento periodico della soluzione nel dominio finito.

Le condizioni di periodicità esprimono l'uguaglianza della funzione e della derivata in direzione normale ai bordi, sui bordi ξ_{min} e ξ_{max} della griglia; per la traduzione in termini finiti delle condizioni di periodicità, basta introdurre dei volumi fantasma (le celle fittizie $(0, j)$ e (n, j)) di dimensione nulla in direzione ξ e immediatamente risulta:

$$\begin{cases} \phi(0, j) = \phi(n, j) & (j = 1, \dots, m-1) \\ \frac{\phi(1, j) - \phi(0, j)}{l_\xi(1, j)} = \frac{\phi(n, j) - \phi(n-1, j)}{l_\xi(n-1, j)} & (j = 1, \dots, m-1) \end{cases}$$

La soluzione di questo sistema di equazioni conduce a una relazione che esprime il valore della funzione ϕ nel centro del j -esimo volume fantasma

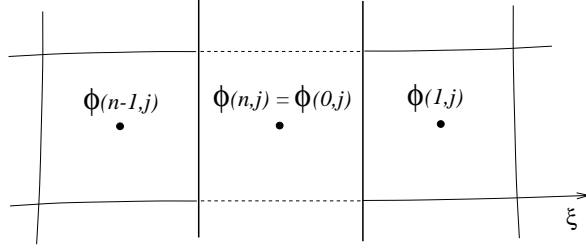


Figura 2.4: Condizioni al contorno periodiche

in funzione dei valori $\phi(1, j)$ e $\phi(n-1, j)$.

$$\phi(0, j) = \left(\frac{\phi(1, j)}{l_\xi(1, j)} + \frac{\phi(n-1, j)}{l_\xi(n-1, j)} \right) \cdot \left(\frac{l_\xi(1, j) \cdot l_\xi(n-1, j)}{l_\xi(1, j) + l_\xi(n-1, j)} \right)$$

La 2.4, per le celle $(1, j)$ diventa:

$$A_{s_{1,j-1}} \phi(1, j-1) + A_{xw_j} \phi(n-1, j) + A_{p_{1,j}} \phi(1, j) + \\ + A_{e_{2,j}} \phi(2, j) + A_{n_{1,j+1}} \phi(1, j+1) = Q_{1,j}$$

in cui si definisce un nuovo termine A_{xw_j} e $A_{p_{1,j}}$ cambia di conseguenza:

$$A_{xw_j} = 2 \frac{l_w(1, j)}{l_\xi(1, j) + l_\xi(n-1, j)} \\ A_{p_{1,j}} = - (A_{s_{1,j-1}} + A_{xw_j} + A_{e_{2,j}} + A_{n_{1,j+1}})$$

Cambiamenti dello stesso tipo interessano l'equazione per la generica cella $(n-1, j)$; in quel caso la variabile $\phi(1, j)$ compare moltiplicata per:

$$A_{xe_j} = 2 \frac{l_e(n-1, j)}{l_\xi(1, j) + l_\xi(n-1, j)}$$

e l'espressione per $A_{p_{n-1,j}}$ si modifica di conseguenza.

Perché le condizioni di periodicità abbiano senso deve essere, per ogni j , $l_w(1, j) = l_e(n-1, j)$; ne discende immediatamente l'uguaglianza $A_{xw_j} = A_{xe_j} = A_{x_j}$.

2.4 Aspetto della matrice

La valutazione per via numerica dell'equazione di Poisson richiede la soluzione di un sistema lineare di $(n-1) \cdot (m-1)$ equazioni, che si può rappresentare in forma matriciale:

$$\mathbf{M}\phi = \mathbf{Q} \quad (2.5)$$

Se le incognite nel vettore colonna sono ordinate contando le celle da sinistra a destra e dal basso verso l'alto, se cioè l'incognita $\phi_{i,j}$ sta nel vettore colonna al posto $(m-1) \cdot (j-1) + i$, la matrice \mathbf{M} sarà una matrice tridiagonale a blocchi, simmetrica;

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} D_1 & N_2 & & & & & & & \\ S_1 & D_2 & N_3 & & & & & & \\ & S_2 & D_3 & N_4 & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & S_{j-1} & D_j & N_{j+1} & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & S_{m-4} & D_{m-3} & N_{m-2} & \\ & & & & & & S_{m-3} & D_{m-2} & N_{m-1} \\ & & & & & & & S_{m-2} & D_{m-1} \end{pmatrix}$$

le cui matrici \mathbf{D}_j con $j = (1 \dots m-1)$ poste sulla diagonale principale hanno la struttura:

$$\mathbf{D}_j = \begin{pmatrix} A_{p1,j} & A_{e2,j} & & & & & & A_{x_j} \\ A_{w1,j} & A_{p2,j} & A_{e3,j} & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & A_{w_{i-1,j}} & A_{p_{i,j}} & A_{e_{i+1,j}} & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & A_{w_{n-3,j}} & A_{p_{n-2,j}} & A_{e_{n-1,j}} & \\ A_{x_j} & & & & & A_{w_{n-2,j}} & A_{p_{n-1,j}} & \end{pmatrix}$$

le matrici poste sulle diagonali secondarie sono delle matrici diagonali:

$$\mathbf{S}_j = \begin{pmatrix} A_{s_1,j} & & & & \\ & A_{s_2,j} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & A_{s_i,j} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & A_{s_{n-1},j} \end{pmatrix} \quad (j = 1, \dots, m-2)$$

per le quali vale $\mathbf{N}_{j+1} = \mathbf{S}_j$ come si scopre facilmente considerando le eguaglianze: $l_\epsilon(i, j) = l_w(i+1, j)$ e $l_n(i, j) = l_w(i, j+1)$.

Abbiamo già osservato che l'aver imposto condizioni al contorno di Neumann e periodiche sui bordi di Ω implica che la soluzione ϕ sia definita a meno di una costante; questo significa che la matrice \mathbf{M} ha rango pari alla sua dimensione meno uno e il sistema di equazioni ha ∞^1 soluzioni.

Per rendere la matrice non singolare e determinare la soluzione tra le infinite possibili si può – ad esempio – annullare tutta l'ultima riga di \mathbf{M} meno il termine nell'ultima colonna che si pone unitario, e fissare anche l'ultimo termine di \mathbf{Q} pari a uno.

Capitolo 3

Formulazione matematica

Le equazioni di conservazione della quantità di moto e l'equazione di continuità scritte per fluidi newtoniani, a viscosità costante e incomprimibili, assieme alle condizioni iniziali e le condizioni al contorno costituiscono il problema da risolvere. In questo capitolo presento il metodo di soluzione e i calcoli per il passaggio alla forma discreta delle equazioni continue.

3.1 Le equazioni del moto

Le equazioni del moto vengono scritte in termini adimensionali come si usa in fluidodinamica; il vantaggio che ne deriva è la possibilità di estendere i risultati ottenuti dallo studio di un caso particolare a tutti i casi in relazione di similitudine con il primo.

Se si indicano provvisoriamente le grandezze dimensionali con un asterisco e si sceglie, come scala per le lunghezze, la quantità δ e per le velocità la velocità w_τ , si ricavano le variabili adimensionali:

$$z = \frac{z^*}{\delta^*}; \quad w = \frac{w^*}{w_\tau^*}; \quad t = \frac{t^* w_\tau^*}{\delta^*}; \quad p = \frac{p^*}{\rho^* w_\tau^{*2}}$$

Le equazioni adimensionali di Navier-Stokes che esprimono la conserva-

zione della quantità di moto lungo le coordinate (ξ, η, ζ) sono, per un fluido a proprietà costanti:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla u &= \frac{1}{Re_\tau} \nabla^2 u - \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{1}{Fr^2} \gamma_\xi \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla v &= \frac{1}{Re_\tau} \nabla^2 v - \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{1}{Fr^2} \gamma_\eta \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla w &= \frac{1}{Re_\tau} \nabla^2 w - \frac{\partial p}{\partial \zeta} + \frac{1}{Fr^2} \gamma_\zeta\end{aligned}\tag{3.1}$$

dove si sono indicate con (u, v, w) le componenti della velocità \vec{v} lungo le coordinate (ξ, η, ζ) ; le γ_i sono le componenti dell'accelerazione di gravità normalizzata nelle tre direzioni e si sono introdotti i due gruppi adimensionali di Reynolds e di Froude:

$$Re_\tau = \frac{\delta w_\tau}{\nu}; \quad Fr = \frac{w_\tau}{\sqrt{\delta g}}$$

L'equazione di continuità per fluidi incompressibili, espressa in forma adimensionale è:

$$\text{div}(\vec{v}) = 0\tag{3.2}$$

e indica che in ogni istante il campo di velocità deve essere a divergenza nulla.

3.1.1 Il numero di Reynolds Re_τ

Il numero di Reynolds più usato nello studio della fluidodinamica dei moti interni ¹ è quello che tiene conto della velocità media del flusso w_m . In un canale di semialtezza δ :

$$Re = \frac{2 \delta w_m}{\nu}$$

Nella letteratura della fluidodinamica numerica e in particolare quella riguardante le simulazioni di tipo DNS si trova più spesso riferimento al

¹Per i moti esterni si usa, al posto di w_m , la velocità indisturbata w_∞ .

numero di Reynolds Re_τ :

$$Re_\tau = \frac{\delta w_\tau}{\nu}$$

che tiene conto della *shear velocity* o velocità d'attrito:

$$w_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (3.3)$$

dove τ_w è lo sforzo di attrito alla parete.

Si può trovare una relazione tra i due numeri di Reynolds non appena si conosca il fattore d'attrito, infatti se si definisce una velocità adimensionale w_{ad} :

$$w_{ad} = \frac{w_m}{w_\tau}$$

dalle definizioni di Re e Re_τ discende

$$Re = 2 w_{ad} Re_\tau$$

D'altra parte la definizione di w_{ad} , la 3.3 e la $\tau_w = \frac{1}{2} \rho C_f w_m^2$ portano alla:

$$w_{ad} = \sqrt{\frac{2}{C_f}}$$

cosicché se si sceglie, per il flusso turbolento in un canale piano parallelo di altezza 2δ , la relazione basata su risultati sperimentali reperita in [4]:

$$C_f = \frac{0.127}{Re_{4\delta}^{0.3}}$$

dove sia $Re_{4\delta} = 2 Re$, la relazione tra i numeri di Reynolds definiti sopra risulta:

$$Re_\tau = 0.113 \sqrt{Re_{2\delta}^{1.7}}$$

3.2 Il metodo di soluzione *projection*

Il metodo di soluzione *projection* permette di risolvere, al costo dell'introduzione di una approssimazione, le equazioni di conservazione della

quantità di moto separatamente dall'equazione di continuità, con notevole riduzione della complessità del calcolo. Il metodo *projection* – utilizzato per lo sviluppo del codice – viene presentato qui in forma riassuntiva; si rimanda a [5] per una descrizione più completa.

Se si scrivono le 3.1 vettorialmente e si indica il termine delle forze di massa più brevemente con \vec{f} , il sistema di equazioni da risolvere è:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \frac{1}{Re_\tau} \nabla^2 \vec{v} - \nabla p + \vec{f} \\ div(\vec{v}) = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

le incognite sono, in ogni istante di tempo, il vettore velocità \vec{v} e la pressione. Sia Ω il dominio di calcolo:

$$\Omega = \{ \xi, \eta, \zeta : \xi \in [\xi_{min}, \xi_{max}], \eta \in [\eta_{min}, \eta_{max}], \zeta \in [\zeta_{min}, \zeta_{max}] \}$$

il bordo del dominio di calcolo può pensarsi suddiviso in una parte Γ_1 che rappresenta le pareti solide e una parte Γ_2 che rappresenta i lati aperti, a contatto con altro fluido. Il valore della velocità viene specificato sulla porzione Γ_1 di contorno e in particolare vi si impongono condizioni al contorno del tipo *no-slip* cioè di scorrimento nullo:

$$\vec{v} = 0 \quad \text{in } \Gamma_1$$

mentre vengono imposte condizioni di periodicità su Γ_2 . Le condizioni di periodicità sui bordi ξ_{min} e ξ_{max} si esprimono:

$$\begin{cases} \vec{v}|_{\xi_{min}} = \vec{v}|_{\xi_{max}} \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi_i} \Big|_{\xi_{min}} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi_i} \Big|_{\xi_{max}} \end{cases}$$

Le condizioni iniziali sono costituite da un campo di velocità all'istante $t = 0$:

$$\vec{v}_{t=0} = \vec{v}_0$$

il campo di velocità all'istante iniziale \vec{v}_0 , oltre a essere conservativo, deve rispettare le condizioni al contorno.

Se si applica l'operatore di divergenza alla prima delle 3.4 e si utilizza la seconda per annullare la divergenza dell'accelerazione e del termine diffusivo, si ottiene l'equazione di Poisson per la pressione:

$$\nabla^2 p = \text{div}(\vec{f} - \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}) \quad (3.5)$$

che può prendere il posto dell'equazione di continuità in 3.4.

Le equazioni di Navier-Stokes viste come proiezioni

In questo paragrafo le equazioni di Navier-Stokes vengono reinterpretate con considerazioni che saranno utili per la comprensione della sequenza di calcolo descritta nel prossimo paragrafo. Viene definita una funzione s :

$$s(\vec{v}) = \frac{1}{Re_\tau} \nabla^2 \vec{v} + \vec{f} - \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$$

allora le equazioni del moto si possono scrivere:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla p = s(\vec{v}) \\ \nabla^2 p = \text{div}(\vec{f} - \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}) \end{cases} \quad (3.6)$$

In generale $s(\vec{v})$ non è irrotazionale né a divergenza nulla. Si introducono due operatori di proiezione \mathcal{P} e \mathcal{Q} , tali che \mathcal{P} proietta il suo argomento in un sottospazio a divergenza nulla mentre \mathcal{Q} è un operatore di proiezione in un sottospazio di vettori irrotazionali, in modo che

$$\mathcal{P}(s) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

$$\mathcal{Q}(s) = \nabla p$$

essendo il campo dell'accelerazione un campo conservativo e il campo di pressione irrotazionale.

Sequenza logica di calcolo

Invece di risolvere le equazioni 3.6 in modo accoppiato, si può pensare di disaccoppiarle e risolvere la prima fissando il gradiente di pressione per ottenere un campo di velocità approssimato, di correggere il campo

di velocità con l'imposizione della conservazione della massa e di calcolare successivamente la pressione per l'istante attuale con l'equazione di Poisson per la pressione. La sequenza di calcolo² si può schematizzare in questo modo:

- ▷ Si assegna un valore di tentativo $\nabla\tilde{p}$ al gradiente della pressione; si calcola $\tilde{\mathbf{v}}$ applicando le stesse condizioni al contorno di \mathbf{v} :

$$\frac{\partial\tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} = s(\tilde{\mathbf{v}}) - \nabla\tilde{p} \quad (3.7)$$

Il campo di velocità $\tilde{\mathbf{v}}$ che si ottiene è in generale a divergenza non nulla poiché $\nabla\tilde{p} \neq \nabla p$.

- ▷ A questo punto se si proietta $\tilde{\mathbf{v}}$ in un campo a divergenza nulla, la velocità $\mathbf{v} = \mathcal{P}(\tilde{\mathbf{v}})$ che si ottiene è una approssimazione, migliore di $\tilde{\mathbf{v}}$, della velocità \mathbf{v}^* che soddisfa le equazioni di Navier-Stokes in quell'istante.
- ▷ Finalmente, noto il campo di velocità \mathbf{v} si può calcolare il valore della pressione dall'equazione 3.5 di Poisson.

L'equazione 3.7 non può essere integrata nel tempo per lunghi periodi senza allontanarsi notevolmente da un campo di velocità conservativo essendo in generale $s(\tilde{\mathbf{v}})$ e $\nabla\tilde{p}$ a divergenza non nulla. Per questo, alla fine di ogni passo di integrazione, bisogna sostituire il campo $\tilde{\mathbf{v}}$ con il campo di velocità corretto dall'imposizione della continuità e \tilde{p} con il campo di pressione appena calcolato. In termini discreti e secondo il metodo implicito di Eulero si calcola:

$$\frac{\tilde{\mathbf{v}}^{(r+1)} - \mathbf{v}^{(r)}}{\Delta t_r} = s(\tilde{\mathbf{v}})^{(r+1)} - \nabla\tilde{p}^{(r+1)}$$

Si dimostra che se alla fine di ogni passo di tempo si sostituisce a $\tilde{\mathbf{v}}^{(r+1)}$ il campo conservativo $\mathbf{v}^{(r+1)} = \mathcal{P}(\tilde{\mathbf{v}})^{(r+1)}$, controllando e limitando in questo modo l'allontanarsi nel corso del tempo del campo di velocità dal

²Avendo scelto di mantenere la notazione di Gresho e di indicare con una tilde le grandezze provvisorie del metodo *projection* abbandoniamo per il momento il segno di vettore sulle grandezze vettoriali che indicheremo invece in neretto.

sottospazio a divergenza nulla, l'errore introdotto con questo metodo è dell'ordine di Δt^3 , cioè $\mathbf{v}^* = \mathbf{v} + \mathcal{O}(\Delta t^3)$.

L'algoritmo che in pratica è stato utilizzato è una ulteriore elaborazione introdotta da Gresho, della sequenza logica di calcolo presentata qui e viene descritta nel prossimo paragrafo.

3.2.1 Descrizione dell'algoritmo

La sequenza di operazioni descritte qui sotto viene ripetuta a ogni passo di tempo per aggiornare la velocità e la pressione all'istante $r+1$.

- ▷ Calcolo di $\tilde{\mathbf{v}}^{(r+1)}$ dai valori noti della velocità agli istanti³ r e $r-1$ e della pressione in r . L'equazione da risolvere per la direzione ξ è la 3.8 dove per $u^{(r+1)}$ si intenda $\tilde{u}^{(r+1)}$; equazioni dello stesso tipo devono essere risolte lungo η e ζ .

Alla velocità intermedia $\tilde{\mathbf{v}}$ vengono imposte le stesse condizioni al contorno della velocità \mathbf{v} : condizioni di non scorrimento sui contorni solidi e condizioni periodiche sulle superfici aperte.

- ▷ Calcolo della pseudopressione dalla soluzione di un'equazione di Poisson:

$$\nabla^2 \phi = \text{div}(\tilde{\mathbf{v}})^{(r+1)}$$

La pseudopressione ϕ è una grandezza il cui gradiente costituisce la parte a divergenza non nulla di $\tilde{\mathbf{v}}$: $\nabla \phi = \mathcal{Q}(\tilde{\mathbf{v}})$ essa viene calcolata con le condizioni al contorno di Neumann ($\partial \phi / \partial \vec{n} = 0$) sui contorni solidi e periodiche sulle superfici aperte.

- ▷ Correzione della velocità: il campo non conservativo di $\tilde{\mathbf{v}}$ viene corretto per ottenere un campo conservativo.

$$\mathbf{v}^{(r+1)} = \tilde{\mathbf{v}}^{(r+1)} - \nabla \phi$$

³Metodi di integrazione nel tempo più articolati del metodo implicito di Eulero, come il metodo semi-implicito utilizzato in molti programmi di simulazione numerica diretta tengono conto anche del campo di velocità all'istante $r-1$. È questo il caso del nostro programma.

▷ Aggiornamento della pressione con l'espressione approssimata:

$$p^{(r+1)} = p^{(r)} + 2 \frac{\phi}{\Delta t_r}$$

Quest'algoritmo si avvia dai valori del campo di pressione all'istante $r = 0$ e del campo di velocità agli istanti $r = 0$ e $r = -1$ che costituiscono le condizioni iniziali.

3.2.2 Condizioni iniziali

Le condizioni iniziali che si sono in pratica adottate per tutte le simulazioni sono: un campo di pressione nulla all'istante $r = 0$; i campi di velocità agli istanti $r = 0$ e $r = -1$ eguali tra loro e valutati sovrapponendo a un profilo di velocità media, ritenuto prossimo a quello del caso che si sta studiando, delle perturbazioni pseudocasuali di valor medio nullo, di distribuzione di frequenza costante e di ampiezza pari al 20% della massima velocità media. Le perturbazioni al campo di velocità media servono per innescare la turbolenza nella corrente che altrimenti, specialmente in assenza di ostacoli lungo il suo corso, potrebbe mantenersi laminare anche per numeri di Reynolds molto elevati.

Condizioni iniziali approssimate meno grossolanamente e transitori fisicamente realistici si possono ottenere, come si fa in [6], rendendo conservativo secondo il metodo *projection* il campo all'istante $r = -1$ ottenuto nel modo descritto prima. Il campo per $r = 0$ si ottiene poi risolvendo l'equazione di Poisson per la pressione in $r = -1$ e addottando, per l'avviamento, un passaggio alla forma discreta nel tempo a due livelli temporali, cioè che tenga conto delle variabili in due istanti anziché in tre.

Dopo circa 50 000 *timestep*, equivalenti grossomodo a 20 unità di tempo adimensionale, il moto inizializzato nel modo descritto assume le caratteristiche del moto statisticamente stazionario, intendendo con ciò che le grandezze medie nel tempo non variano più. Il verificarsi di queste condizioni si riconosce dall'andamento nel tempo dell'energia cinetica globale: solo quando il suo valore si stabilizza e si osservano oscillazioni attorno un valore medio si può dire di aver raggiunto condizioni statisticamente stazionarie.

3.3 Le equazioni del moto in forma discreta

In questo paragrafo si spiega come avviene nella pratica la riduzione alla forma discreta nel tempo e nello spazio della prima delle 3.1. Le equazioni del moto nelle altre due direzioni si trattano in modo analogo.

3.3.1 Passaggio alla forma discreta nel tempo

Il passaggio alla forma discreta nel tempo avviene secondo un metodo di integrazione semi-implicito e con approssimazioni del secondo ordine. Il termine convettivo $\vec{v} \cdot \nabla u$ espresso nella forma conservativa $\text{div}(u\vec{v})$ viene integrato nel tempo in modo esplicito, alla Adams-Bashfort:

$$\int_{t_r}^{t_r+\Delta t_r} \text{div}(u \cdot \vec{v}) \, dt \cong \frac{1}{2} [3 \text{div}(u \cdot \vec{v})^{(r)} - \text{div}(u \cdot \vec{v})^{(r-1)}] \Delta t_r$$

il termine diffusivo $\nabla^2 u / Re_\tau$ invece viene integrato nel tempo in modo implicito, cioè utilizzando il valore incognito della funzione all'istante $r+1$, secondo il metodo di approssimazione di Crank-Nicolson:

$$\int_{t_r}^{t_r+\Delta t_r} \nabla^2 u \, dt \cong \frac{1}{2} (\nabla^2 u^{(r+1)} + \nabla^2 u^{(r)}) \Delta t_r$$

in questo modo:

$$\begin{aligned} \frac{u^{(r+1)} - u^{(r)}}{\Delta t_r} = & -\frac{1}{2} [3 \text{div}(u \cdot \vec{v})^{(r)} - \text{div}(u \cdot \vec{v})^{(r-1)}] + \\ & + \frac{1}{2 Re_\tau} (\nabla^2 u^{(r+1)} + \nabla^2 u^{(r)}) - \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{1}{Fr^2} \gamma_\xi \end{aligned}$$

Definito l'incremento $\Delta u = u^{(r+1)} - u^{(r)}$ della variabile u nell'intervallo di tempo Δt_r , si può scrivere, con abuso di notazione:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\Delta t_r}{2 Re_\tau} \nabla^2\right) \Delta u = & \left\{ -\frac{1}{2} [3 \text{div}(u \cdot \vec{v})^{(r)} - \text{div}(u \cdot \vec{v})^{(r-1)}] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{Re_\tau} \nabla^2 u^{(r)} - \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{1}{Fr^2} \gamma_\xi \right\} \Delta t_r \end{aligned} \quad (3.8)$$

Non c'è indicazione esplicita dell'istante in cui si considera la pressione; in questa fase del metodo di soluzione *projection*, la pressione viene considerata una grandezza nota e si tiene conto dei valori che assume all'istante r .

3.3.2 Passaggio alla forma discreta nello spazio

Per non appesantire eccessivamente il calcolo, il programma è stato scritto in coordinate curvilinee sul piano (ξ, η) ma cartesiane lungo z . La trattazione prosegue tenendo conto di questa semplificazione.

Il metodo di fattorizzazione approssimata

La 3.8 scritta in forma discreta per il generico volume di controllo (i, j, k) introduce sette incognite: la $u_{i,j,k}$ e le altre sei componenti u delle celle adiacenti; perciò per ricavare il valore della velocità $u^{(r+1)}$ in tutto il dominio di calcolo bisogna risolvere una matrice di dimensione $(n-1)(m-1)(p-1)$ con sette coefficienti non nulli per riga. Si può semplificare di molto il calcolo introducendo un'approssimazione nota in letteratura [3] come *approximate factorization*.

La scomposizione approssimata della parte sinistra della 3.8 nei fattori:

$$\left(1 - \frac{\Delta t}{2 Re_\tau} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right) \left(1 - \frac{\Delta t}{2 Re_\tau} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right) \left(1 - \frac{\Delta t}{2 Re_\tau} \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \Delta u$$

introduce un errore ⁴ proporzionale a Δt^3 che essendo più piccolo dell'errore legato al passaggio alla forma discreta può essere tollerato.

Il vantaggio che l'*approximate factorization* introduce è la possibilità di suddividere la soluzione della 3.8 in tre compiti più semplici che consistono nel determinare in successione la variabile ausiliaria Δu^* dalla:

$$\left(1 - \frac{\Delta t}{2 Re_\tau} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right) \Delta u^* = rhs$$

scritta per ogni cella (i, j, k) del dominio dove *rhs* indica la parte destra (*right hand side*) della 3.8 e di seguito:

⁴Si valuta l'ordine di grandezza dell'errore tenendo conto della relazione:

$$\Delta u \cong \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\left(1 - \frac{\Delta t}{2 Re_\tau} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right) \Delta u^{**} = \Delta u^*$$

$$\left(1 - \frac{\Delta t}{2 Re_\tau} \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \Delta u = \Delta u^{**}$$

Il compito molto oneroso della soluzione di un sistema lineare di $(n-1)(m-1)(p-1)$ equazioni è stato così suddiviso “per colonne di celle” in $(m-1)(p-1)$ sistemi di $(n-1)$ equazioni più $(p-1)(n-1)$ sistemi di $(m-1)$ equazioni e $(n-1)(m-1)$ sistemi di $(p-1)$ equazioni, tutti tridiagonali o tridiagonali ciclici, rapidamente risolvibili con gli algoritmi di Thomas [7] e le cui matrici vengono presentate più avanti.

Scrittura nelle celle sfalsate

Si sceglie di calcolare le incognite nei punti della cella indicati nella figura 3.1 e cioè secondo una disposizione sfalsata (*staggered arrangement*)

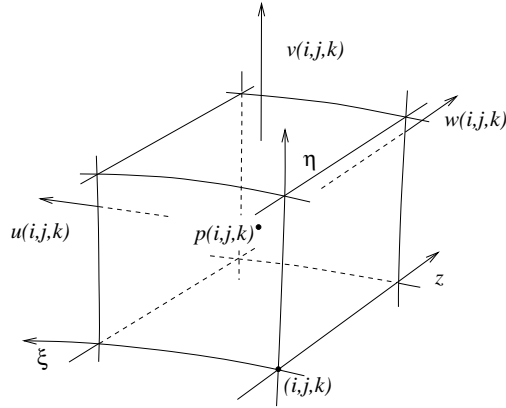


Figura 3.1: Punti di applicazione delle componenti di velocità e della pressione

piuttosto che centrata (*colocated arrangement*) questo perché, con il metodo dei volumi finiti, alcuni termini che richiedono delle interpolazioni

nella disposizione centrata possono essere calcolati senza interpolazioni in quella sfalsata (è il caso del termine diffusivo), la valutazione dei flussi di massa è immediata e il termine della pressione viene facilmente scritto con il metodo delle differenze centrali.

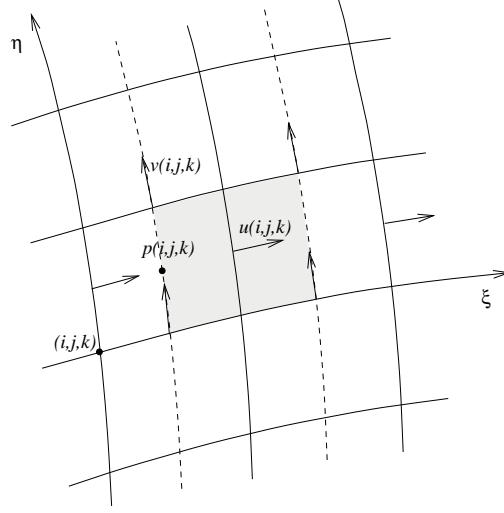


Figura 3.2: Proiezione sul piano (ξ, η) della cella (i, j, k) sfalsata in ξ

Quando si eseguono i calcoli per l'equazione di quantità di moto in direzione ξ , lo si fa su celle traslate di metà della loro larghezza in quella direzione, come quelle rappresentate nella figura 3.2; similmente, quando si considera nella direzione η , si utilizzano celle traslate in direzione η e un discorso analogo vale per ridurre alla forma discreta l'equazione lungo z .

Il termine convettivo

Indicando con V il volume della cella generica, con S la sua superficie esterna, con \vec{n} il vettore normale alla superficie S diretto verso l'esterno, con $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ i versori delle coordinate locali (ξ, η, z) , il termine

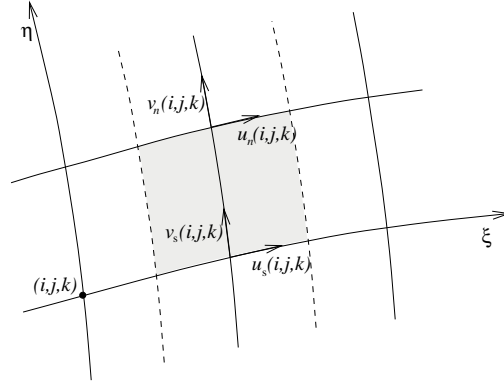


Figura 3.3: Velocità sui lati sud e nord della cella sfalsata in ξ

convettivo integrato sul volume di controllo si scrive:

$$\begin{aligned} \int_V \text{div}(u \vec{v}) \, dV &= \int_S u \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS = \\ &= \int_S u^2 \vec{e}_1 \cdot \vec{n} \, dS + \int_S u v \vec{e}_2 \cdot \vec{n} \, dS + \int_S u w \vec{e}_3 \cdot \vec{n} \, dS \end{aligned}$$

che in forma discreta diventa:

$$\begin{aligned} &\left[\left(\frac{u_{i+1,j,k} + u_{i,j,k}}{2} \right)^2 l_{\eta_{i+1,j}} - \left(\frac{u_{i,j,k} + u_{i-1,j,k}}{2} \right)^2 l_{\eta_{i,j}} \right] l_{z_k} + \\ &+ \left[u_n v_n \left(\frac{l_{n_{i+1,j}} + l_{n_{i,j}}}{2} \right) - u_s v_s \left(\frac{l_{s_{i+1,j}} + l_{s_{i,j}}}{2} \right) \right] l_{z_k} + \\ &+ [u_t w_t - u_b w_b] \frac{l_{\xi_{i+1,j}} + l_{\xi_{i,j}}}{2} l_{e_{i,j}} \end{aligned}$$

Si definiscono, come rappresentato in figura 3.3, le velocità u_s e u_n sui lati sud e nord della cella sfalsata (i, j, k) :

$$u_s = \frac{u_{i,j,k} l_{e_{i,j-1}} + u_{i,j-1,k} l_{e_{i,j}}}{l_{e_{i,j}} + l_{e_{i,j-1}}}$$

$$u_n = \frac{u_{i,j+1,k} l_{e_{i,j}} + u_{i,j,k} l_{e_{i,j+1}}}{l_{e_{i,j+1}} + l_{e_{i,j}}}$$

la velocità $v_n(i, j, k)$ si definisce similmente con semplici interpolazioni lineari tra le componenti $v(i, j, k)$ e $v(i+1, j, k)$; nello stesso modo viene definita $v_s(i, j, k)$. Le velocità sul piano $k+1$ (indicate con il pedice t di

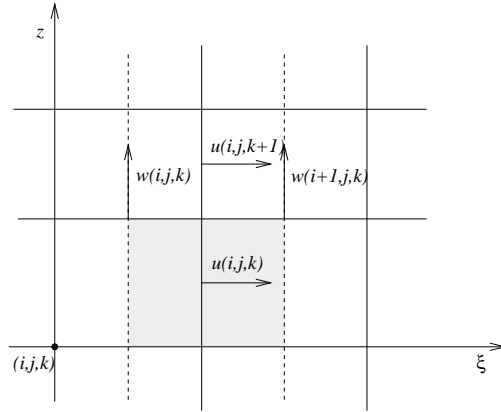


Figura 3.4: Proiezione su un piano parallelo a z della cella i, j, k sfalsata in ξ

top) della cella sfalsata in ξ sono definite:

$$w_t = \frac{w_{i+1,j,k} l_{\xi_{i,j}} + w_{i,j,k} l_{\xi_{i+1,j}}}{l_{\xi_{i+1,j}} + l_{\xi_{i,j}}}$$

$$u_t = \frac{u_{i,j,k+1} l_{z_k} + u_{i,j,k} l_{z_{k+1}}}{l_{z_{k+1}} + l_{z_k}}$$

e quelle sul lato inferiore (con b di *bottom*) sono espresse in modo analogo.

Il termine diffusivo

Il termine diffusivo integrato sul volume di controllo:

$$\begin{aligned} \int_V \nabla^2 u \, dV &= \int_S \nabla u \cdot \vec{n} \, dS = \\ &= \int_S \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \vec{e}_1 + \frac{\partial u}{\partial \eta} \vec{e}_2 + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{e}_3 \right) \cdot \vec{n} \, dS \end{aligned}$$

diventa in forma discreta, con un'approssimazione del secondo ordine delle derivate:

$$\begin{aligned} &\left[\frac{u_{i+1,j,k} - u_{i,j,k}}{l_{\xi_{i+1,j}}} l_{\eta_{i+1,j}} - \frac{u_{i,j,k} - u_{i-1,j,k}}{l_{\xi_{i,j}}} l_{\eta_{i,j}} \right] l_{z_k} + \\ &+ \left[\frac{u_{i,j+1,k} - u_{i,j,k}}{l_{e_{i,j+1}} + l_{e_{i,j}}} (l_{n_{i+1,j}} + l_{n_{i,j}}) - \frac{u_{i,j,k} - u_{i,j-1,k}}{l_{e_{i,j}} + l_{e_{i,j-1}}} (l_{s_{i+1,j}} + l_{s_{i,j}}) \right] l_{z_k} + \\ &+ \left[\frac{u_{i,j,k+1} - u_{i,j,k}}{l_{z_{k+1}} + l_{z_k}} - \frac{u_{i,j,k} - u_{i,j,k-1}}{l_{z_k} + l_{z_{k-1}}} \right] (l_{\xi_{i+1,j}} + l_{\xi_{i,j}}) l_{e_{i,j}} \end{aligned}$$

Il termine di pressione

Per simulare una corrente che fluisca in direzione z , si introduce un termine forzante rappresentato da una pressione p_f che ha derivata costante in quella direzione:

$$\frac{\partial p_f}{\partial z} = 1$$

si può allora pensare che la pressione complessiva P sia formata da una parte fluttuante o periodica p e una parte forzante p_f :

$$P = p_f + p$$

le condizioni al contorno periodiche lungo z si assegnano allora solo alla quota p della pressione complessiva P .

Lungo la direzione ξ , dove non agisce il termine forzante, la pressione è costituita dalla sola quota periodica che integrata sul volume di controllo V :

$$\int_V \frac{\partial p}{\partial \xi} \, dV$$

si scrive in forma discreta:

$$[p(i+1, j, k) - p(i, j, k)] l_e(i, j) l_z(k)$$

Solo quando si ricava la forma discreta dell'equazione di quantità di moto in direzione z , al termine che rappresenta la parte periodica si aggiunge la parte forzante:

$$l_\xi(i, j) l_\eta(i, j) \frac{l_z(k) + l_z(k+1)}{2}$$

Le forze di massa

Il termine delle forze di massa integrato sul volume di controllo V :

$$\int_V \frac{1}{Fr^2} \gamma_\xi dV$$

si esprime in termini finiti sulla cella *staggered* della figura 3.2:

$$\frac{1}{Fr^2} \gamma_\xi \frac{l_\xi(i, j) + l_\xi(i+1, j)}{2} l_e(i, j) l_z(k)$$

Validità sulle celle del contorno

I termini che abbiamo analizzato sono, a ogni passo di tempo, delle quantità note poiché vengono calcolati agli istanti r e $r-1$. Perché quelle espressioni valgano anche sulle celle del bordo, le condizioni al contorno specificate in 3.2 devono essere verificate sulle velocità che vi compaiono:

$$\begin{cases} \vec{v}_{0,j,k} = \vec{v}_{n-1,j,k} \\ \vec{v}_{n,j,k} = \vec{v}_{1,j,k} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{v}_{i,0,k} = 0 \\ u_{i,m,k} = 0 \\ v_{i,m-1,k} = 0 \\ w_{i,m,k} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{v}_{i,j,0} = \vec{v}_{i,j,p-1} \\ \vec{v}_{i,j,p} = \vec{v}_{i,j,1} \end{cases}$$

Per la validità sul bordo delle relazioni discrete appena ricavate, anche le dimensioni delle celle fantasma devono essere fissate opportunamente. Ai volumi fantasma nelle direzioni periodiche si assegnano dimensioni periodiche, in modo che le dimensioni della cella fantasma (n, j, k) siano eguali a quelle delle celle $(1, j, k)$ e similmente le dimensioni delle

celle $(0, j, k)$ siano eguali a quelle delle celle $(n-1, j, k)$ e lo stesso discorso valga per la direzione z mentre lungo la direzione η , con condizioni al contorno di tipo *no-slip* i volumi fantasma abbiano altezza nulla:

$$\begin{cases} l_{w_{i,m}} = 0 \\ l_{e_{i,m}} = 0 \\ l_{\eta_{i,m}} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} l_{w_{i,0}} = 0 \\ l_{e_{i,0}} = 0 \\ l_{\eta_{i,0}} = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

e le altre dimensioni eguali alle celle sul bordo.

Il termine incognito

Consideriamo il primo passo dell'*approximate factorization* in direzione ξ :

$$\left(1 - \frac{\Delta t}{2 Re_\tau} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right) \Delta u^* = rhs$$

La scrittura in forma discreta avviene tramite integrazione sul generico volume di controllo traslato in direzione ξ :

$$\int_V \left(1 - \frac{\Delta t}{2 Re_\tau} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right) \Delta u^* dV = \int_V rhs dV$$

Un'approssimazione del secondo ordine delle derivate, secondo il metodo delle differenze centrali porta alla relazione:

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{\Delta t}{2 Re_\tau} \frac{1}{l_{\xi_{i,j}}}\right) \Delta u_{i-1,j,k}^* + \\ & + \left[\frac{l_{\xi_{i,j}} + l_{\xi_{i+1,j}}}{2} + \frac{\Delta t}{2 Re_\tau} \left(\frac{1}{l_{\xi_{i,j}}} + \frac{1}{l_{\xi_{i+1,j}}}\right)\right] \Delta u_{i,j,k}^* - \\ & -\left(\frac{\Delta t}{2 Re_\tau} \frac{1}{l_{\xi_{i+1,j}}}\right) \Delta u_{i+1,j,k}^* = \frac{rhs_{i,j,k}}{l_{e_{i,j}} l_{z_k}} \end{aligned} \quad (3.10)$$

dove si è indicato con $rhs_{i,j,k}$ l'integrale sul volume della cella i, j, k della rhs .

L'equazione 3.10 non è definita per $i = n-1$, perciò bisogna introdurre le condizioni al contorno; sulle pareti ξ_{min} e ξ_{max} , sono di tipo

periodico e le stesse condizioni valgono per l'incremento di velocità Δu^* :

$$\begin{cases} \Delta u^*(0, j, k) = \Delta u^*(n-1, j, k) \\ \Delta u^*(n, j, k) = \Delta u^*(1, j, k) \end{cases}$$

Quell'equazione ha senso anche per $i = n-1$ non appena si scelgano, come si è fatto per il termine noto, le dimensioni delle celle fantasma $i = n$ eguali a quelle delle corrispondenti celle $i = 1$; così la $l_{\xi_{n,j}} = l_{\xi_{1,j}}$ permette, una volta definiti:

$$\begin{aligned} d_{i,j} &= \frac{l_{\xi_{i,j}} + l_{\xi_{i+1,j}}}{2} + \frac{\Delta t}{2 Re_\tau} \left(\frac{1}{l_{\xi_{i,j}}} + \frac{1}{l_{\xi_{i+1,j}}} \right) \\ s_{i,j} &= -\frac{\Delta t}{2 Re_\tau} \frac{1}{l_{\xi_{i,j}}} \end{aligned}$$

di scrivere le matrici tridiagonali cicliche dei $(m-1)(p-1)$ sistemi lineari da risolvere a ogni passo di tempo in questo modo:

$$\begin{pmatrix} d_{1,j,k} & s_{2,j,k} & & & & s_{1,j,k} \\ s_{2,j,k} & d_{2,j,k} & s_{3,j,k} & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & s_{i,j,k} & d_{i,j,k} & s_{i+1,j,k} & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & s_{n-2,j,k} & d_{n-2,j,k} & s_{n-1,j,k} \\ s_{n,j,k} & & & & & s_{n-1,j,k} & d_{n-1,j,k} \end{pmatrix}$$

Il secondo passo dell'*approximate factorization* per l'equazione di conservazione di quantità di moto lungo ξ si riduce alla forma discreta secondo l'equazione:

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{\Delta t}{Re_\tau} \frac{1}{l_{e_{i,j}} + l_{e_{i,j-1}}} \right) \Delta u_{i,j-1,k}^{**} + \\ & + \left[l_{e_{i,j}} + \frac{\Delta t}{Re_\tau} \left(\frac{1}{l_{e_{i,j}} + l_{e_{i,j-1}}} + \frac{1}{l_{e_{i,j+1}} + l_{e_{i,j}}} \right) \right] \Delta u_{i,j,k}^{**} - \\ & - \left(\frac{\Delta t}{Re_\tau} \frac{1}{l_{e_{i,j+1}} + l_{e_{i,j}}} \right) \Delta u_{i,j+1,k}^{**} = \Delta u_{i,j,k}^* l_{e_{i,j}} \end{aligned}$$

Le condizioni al contorno sui bordi a η costante sono del tipo *no-slip*; oltre alle velocità, anche gli incrementi Δ di velocità nel tempo si annullano in corrispondenza delle pareti solide. Se si considerano volumi fantasma di spessore nullo, come specificato nelle 3.9, le definizioni:

$$d_{i,j} = l_{e_{i,j}} + \frac{\Delta t}{Re_\tau} \left(\frac{1}{l_{e_{i,j}} + l_{e_{i,j-1}}} + \frac{1}{l_{e_{i,j+1}} + l_{e_{i,j}}} \right)$$

$$s_{i,j} = -\frac{\Delta t}{Re_\tau} \frac{1}{l_{e_{i,j}} + l_{e_{i,j-1}}}$$

permettono di scrivere la matrice tridiagonale dei sistemi lineari da risolvere:

$$\begin{pmatrix} d_{i,1,k} & s_{i,2,k} & & & & & \\ s_{i,2,k} & d_{i,2,k} & s_{i,3,k} & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & s_{i,j,k} & d_{i,j,k} & s_{i,j+1,k} & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & s_{i,m-2,k} & d_{i,m-2,k} & s_{i,m-1,k} \\ & & & & s_{i,m-1,k} & d_{i,m-1,k} & \end{pmatrix}$$

Il terzo passo, che porta alla determinazione dell'incremento di velocità Δu , è espresso dall'equazione discreta:

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{\Delta t}{Re_\tau} \frac{1}{l_{z_k} + l_{z_{k-1}}} \right) \Delta u_{i,j,k-1} + \\ & + \left[l_{z_k} + \frac{\Delta t}{Re_\tau} \left(\frac{1}{l_{z_{k+1}} + l_{z_k}} + \frac{1}{l_{z_k} + l_{z_{k-1}}} \right) \right] \Delta u_{i,j,k} - \\ & - \left(\frac{\Delta t}{Re_\tau} \frac{1}{l_{z_{k+1}} + l_{z_k}} \right) \Delta u_{i,j,k+1} = \Delta u_{i,j,k}^{**} l_{z_k} \end{aligned}$$

In direzione z sono imposte condizioni periodiche sulla velocità; è sufficiente definire le altezze dei volumi fantasma in modo ciclico, come del resto si è fatto per il termine noto:

$$\begin{cases} l_z(p) = l_z(1) \\ l_z(0) = l_z(p-1) \end{cases}$$

perché, una volta definiti i termini:

$$d_k = l_{z_k} + \frac{\Delta t}{Re_\tau} \left(\frac{1}{l_{z_{k+1}} + l_{z_k}} + \frac{1}{l_{z_k} + l_{z_{k-1}}} \right)$$

$$s_k = - \frac{\Delta t}{Re_\tau} \frac{1}{l_{z_k} + l_{z_{k-1}}}$$

le $(n-1)(m-1)$ matrici da risolvere si possano scrivere:

$$\begin{pmatrix} d_1 & s_2 & & & & & s_1 \\ s_2 & d_2 & s_3 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & s_k & d_k & s_{k+1} & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & s_{p-2} & d_{p-2} & s_{p-1} \\ s_p & & & & & s_{p-1} & d_{p-1} \end{pmatrix}$$

3.3.3 Controllo dell'errore di massa

Siccome condizioni iniziali assegnate come descritto in 3.2.2 sono poco realistiche, può accadere che, soprattutto in geometrie accidentate quando ci si allontana dall'ipotesi di griglie perfettamente ortogonali, il calcolo si dimostri instabile proprio durante i primi passi di tempo. L'instabilità, dovuta evidentemente al fatto che la correzione del campo \tilde{v} in un campo di velocità conservativo non è abbastanza efficace in quelle condizioni di moto, si manifesta con il crescere dell'*errore di massa* e conseguentemente, in zone localizzate in prossimità delle celle meno ortogonali, della pressione e della velocità.

L'errore di massa ε_m è calcolato come la media del valore assoluto del flusso di velocità da ciascuna cella:

$$\varepsilon_m = \frac{\sum_{ijk} |\varphi_{i,j,k}|}{(n-1)(m-1)(p-1)}$$

dove con $\varphi_{i,j,k}$ si è indicato il flusso del vettore velocità dalla cella (i, j, k) :

$$\begin{aligned} \varphi_{i,j,k} = & (u_{i,j,k} l_{e_{i,j}} l_{z_k} - u_{i-1,j,k} l_{w_{i,j}} l_{z_k}) + \\ & + (v_{i,j,k} l_{n_{i,j}} l_{z_k} - v_{i,j-1,k} l_{s_{i,j}} l_{z_k}) + \\ & + (w_{i,j,k} - w_{i,j,k-1}) l_{\xi_{i,j}} l_{\eta_{i,j}} \end{aligned}$$

Per superare i problemi di instabilità nei primi passi di tempo si è valutata la possibilità di abbattere l'errore di massa della velocità $\tilde{\mathbf{v}}$ facendo passare il campo vettoriale attraverso la fase di “proiezione in un sottospazio a divergenza nulla” più di una volta, secondo lo schema:

1. Calcolo di $\tilde{\mathbf{v}}^{(r+1)}$ da $\mathbf{v}^{(r)}$, $\mathbf{v}^{(r-1)}$ e $p^{(r)}$
2. Calcolo di ϕ : $\nabla^2 \phi = \text{div } \tilde{\mathbf{v}}^{(r+1)}$
3. Correzione del campo $\tilde{\mathbf{v}}$: $\mathbf{v}^{(r+1)} = \tilde{\mathbf{v}}^{(r+1)} - \nabla \phi$
4. Calcolo dell'errore di massa ε_m
5. Se $\varepsilon_m > \sigma$ allora $\tilde{\mathbf{v}} \leftarrow \mathbf{v}$ e ritorna al passo 2

L'esperienza ci ha portato a ritenere accettabile un errore di massa quando è minore di una soglia $\sigma = 10^{-7}$ anche se in condizioni statisticamente stazionarie un campo di velocità $\tilde{\mathbf{v}}$, con un errore di massa che vale a seconda della geometria del dominio, della qualità della griglia e dell'ampiezza del *timestep* $10^{-7} \div 10^{-5}$, viene corretto con un solo passaggio in un campo \mathbf{v} che, a seconda geometria del dominio, della qualità della griglia e della precisione con cui è avvenuta la diagonalizzazione (vedi a questo proposito l'appendice A) ha valori di ε_m dell'ordine di $10^{-17} \div 10^{-11}$.

Si è osservato ancora che l'effetto ottenuto nelle prime correzioni – in cui l'errore di massa viene abbassato ogni volta di almeno quattro ordini di grandezza – diminuisce notevolmente fino a diventare insignificante quando ε_m si avvicini all'errore di arrotondamento.

Capitolo 4

Canale tra lastre piane parallele

Prima di utilizzare il programma per l'analisi del moto turbolento sulle superfici scanalate, ho verificato la stabilità e l'accuratezza del codice nella simulazione di correnti laminari e turbolente tra lastre piane parallele. Le coordinate utilizzate in questa geometria particolarmente semplice sono cartesiane; per questo motivo in questo capitolo si chiamano (x, y, z) anziché (ξ, η, z) .

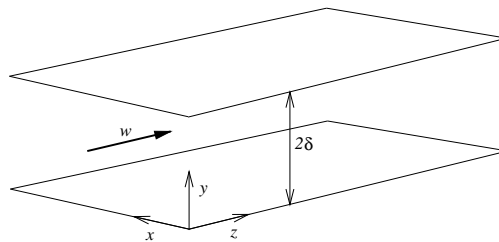


Figura 4.1: canale tra lastre parallele

4.1 Raccolta delle grandezze statistiche

Se si segue l'andamento nel tempo di una componente della velocità in un punto fisso di un campo di moto turbolento, si notano piccole e rapide fluttuazioni di velocità attorno a un valore medio. Il valore istantaneo della velocità in un punto si può allora scrivere come la somma di una velocità media \overline{w} e di una variazione di velocità w' :

$$w = \overline{w} + w'$$

valgono considerazioni analoghe oltre che per le altre componenti di velocità, per la pressione, l'energia cinetica, la vorticità, e le altre grandezze variabili nel tempo. Le quantità medie sono definite:

$$\overline{\phi} = \frac{1}{t} \int_0^t \phi \, dt$$

in modo che la media del tempo delle quantità fluttuanti ϕ' sia nulla.

Quando la geometria del problema è omogenea lungo una direzione x_i e accade perciò che il valore medio di ogni grandezza sia lo stesso in tutti i punti allineati lungo quella direzione, si può sfruttare questa proprietà per accorciare considerevolmente il periodo di raccolta delle statistiche, valutando la media di una grandezza tramite l'integrazione, oltre che nel tempo, anche nello spazio lungo la *direzione di omogeneità* x_i . Secondo questo modo di ragionare il calcolo del profilo medio di una grandezza in un canale tra lastre piane, parallele al piano (x, z) , può avvenire tramite integrazione nel tempo e nelle direzioni di omogeneità x e z .

L'algoritmo per la raccolta del valor medio $\overline{\phi}$ e della deviazione standard ϕ_{rms} della grandezza generica $\phi_t(x, y, z)$, consiste di una parte che deve essere eseguita a ogni passo di tempo dopo aver, al di fuori di quel ciclo, inizializzato a zero le variabili $t, \overline{\phi}, \phi_{rms}$:

$$\begin{aligned} t &\leftarrow t + \Delta t \\ \overline{\phi}(i, j, k) &\leftarrow \overline{\phi}(i, j, k) + \phi(i, j, k) \cdot \Delta t \\ \phi'(i, j, k) &\leftarrow \phi(i, j, k) - \overline{\phi}(i, j, k) / t \\ \phi_{rms}(i, j, k) &\leftarrow \phi_{rms}(i, j, k) + \phi'^2(i, j, k) \cdot \Delta t \end{aligned}$$

e una parte da eseguire alla fine del periodo di raccolta delle statistiche:

$$\begin{aligned}\bar{\phi}(i, j, k) &\leftarrow \bar{\phi}(i, j, k)/t \\ \phi_{rms}(i, j, k) &\leftarrow \sqrt{\phi_{rms}(i, j, k)/t}\end{aligned}$$

A questo punto, per raccogliere campioni statistici più numerosi si può integrare anche lungo le direzioni di omogeneità.

Vorrei osservare che non è possibile, mediare lungo le direzioni di omogeneità a ogni *timestep* anziché alla fine del periodo di raccolta delle statistiche per risparmiare l'allocazione in memoria di tre vettori di dimensione (n, m, p) per ogni grandezza raccolta, infatti se così si facesse il calcolo di ϕ_{rms} per il caso del canale, dalla $\phi_t(j)$:

$$\begin{aligned}\phi_t(j) &= \frac{1}{n \cdot m} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p \phi_t(i, j, k) - \\ &\quad - \frac{1}{n \cdot m \cdot t} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p \sum_{r=0}^{n_t} \phi_{t_r}(i, j, k) \cdot \Delta t_r\end{aligned}$$

porterebbe a valori inferiori della ϕ_{rms} calcolata correttamente da:

$$\phi_t(i, j, k) = \phi_t(i, j, k) - \frac{1}{t} \sum_{r=0}^{n_t} \phi_{t_r}(i, j, k) \cdot \Delta t_r$$

In queste equazioni n_t è il numero di passi di tempo al tempo t ; r è l'indice che corre sui passi di tempo e t_r è il tempo al passo r .

4.2 Simulazioni in regime laminare

Uno dei casi in cui si conosce la soluzione analitica delle equazioni di Navier-Stokes è quello del flusso tra due lastre parallele con gradiente di pressione uniforme e indipendente dal tempo; si tratta della *corrente piana di Poiseuille*. Il profilo di velocità in direzione della corrente è:

$$w(y) = -\frac{1}{2} \frac{\Delta p}{\Delta z} Re_\tau (2 - y) y \quad (4.1)$$

Tutte le grandezze che compaiono nella 4.1 sono adimensionali; le scale dimensionali usate sono:

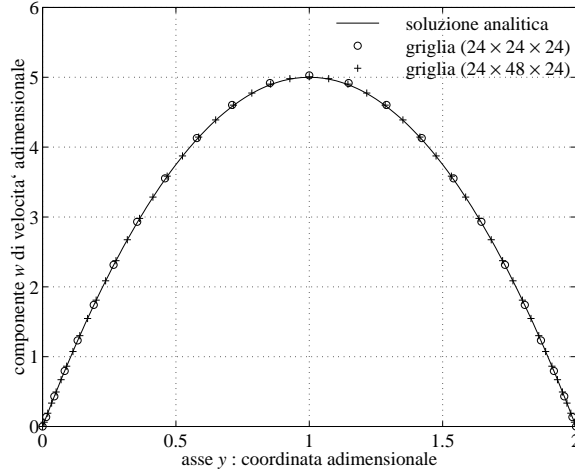


Figura 4.2: Profili di velocità a $Re_\tau = 10$

- ▷ la semialtezza del canale δ per le lunghezze
- ▷ la velocità dello sforzo di taglio w_τ definita in 3.3 per le velocità
- ▷ il prodotto ρw_τ^2 per le pressioni

Se si individuano provvisoriamente con un asterisco la grandezze dimensionali, quelle adimensionali hanno le espressioni:

$$w = \frac{w^*}{w_\tau^*}; \quad y = \frac{y^*}{\delta^*}; \quad \Delta p = \frac{\Delta p^*}{\rho^* w_\tau^{*2}}$$

Le simulazioni, effettuate su un dominio di dimensioni $(\pi, 2, 2\pi)$ e due diverse griglie $(24 \times 24 \times 24)$ e $(24 \times 48 \times 24)$ a spaziatura uniforme lungo x e z ma a tangente iperbolica lungo y hanno dato risultati in ottima concordanza con la soluzione analitica del moto per il profilo di velocità, e per il coefficiente d'attrito.

In questa occasione ho controllato che la norma euclidea dell'errore vari come il quadrato della spaziatura della griglia, cioè che effettiva-

mente il passaggio alla forma discreta sia avvenuta con l'introduzione di approssimazioni del secondo ordine.

4.3 Simulazioni in regime turbolento

Si sono condotte due simulazioni a un numero di Reynolds $Re_\tau = 194.33$, equivalente a $Re = 5800$: la prima su una griglia di $(24 \times 48 \times 24)$ nodi e l'altra su una griglia più fitta, di $(25 \times 97 \times 33)$ nodi.

Le dimensioni del dominio di calcolo si sono scelte in modo da cogliere le strutture turbolente di dimensioni maggiori: in letteratura è indicata una *minimal flow unit* delle dimensioni $(0.375\pi, 2, 1.25\pi)$ per questo numero di Reynolds. I risultati della simulazione sono stati confrontati con quelli di un *database* disponibile in rete [8].

4.3.1 Velocità media e legge logaritmica di parete

La media nel tempo della velocità viene calcolata tramite integrazione nel tempo e nelle direzioni di omogeneità x e z delle velocità istantanee; i calcoli per la componente w sono presentati in termini finiti; in modo del tutto simile si possono calcolare le altre componenti delle velocità medie.

$$\bar{w}(j) = \frac{1}{t l_x l_z} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{r=0}^{n_t} w_{t_r}(i, j, k) \Delta t_r l_{x_i} l_{z_k}$$

Per verificare la qualità dei risultati, la media della componente w è stata confrontata in figura 4.3 con il profilo :

$$w = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B$$

dove y^+ è la distanza dalla parete nelle unità adimensionali:

$$y^+ = \frac{w_\tau^* y^*}{\nu^*}$$

κ è la costante di von Karman ($\kappa = 0.41$) e B è una costante empirica legata allo spessore del sottostrato viscoso ($B \cong 5.2$ su una lastra piana);

per il sottostrato laminare, il confronto avviene con il profilo lineare $w = y^+$.

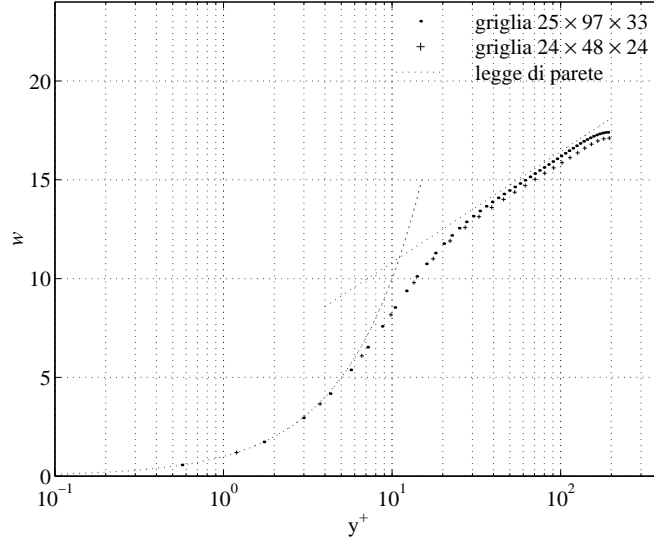


Figura 4.3: Confronto con la legge logaritmica di parete

Si può notare come un inaffinamento della griglia nella direzione perpendicolare alle pareti migliori l'accuratezza del calcolo.

4.3.2 Tensione tangenziale turbolenta

La tensione tangenziale turbolenta è una misura del trasferimento turbolento della quantità di moto dovuto alle fluttuazioni di velocità. Per il caso del canale interessano gli sforzi sul piano (x, z) e diretti come z ; perciò si calcola la:

$$\tau_{yz} = -\rho \overline{v'w'}$$

dove $\overline{v'w'}$ indica una media nel tempo del prodotto delle velocità fluttuanti; data la geometria del problema, l'integrazione può avvenire oltre

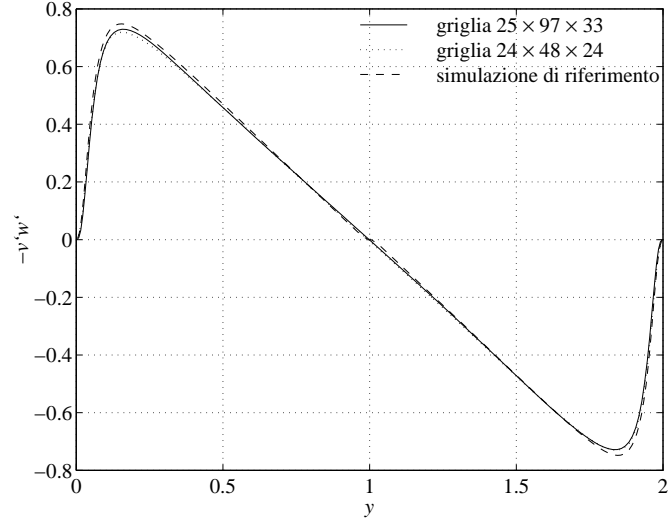


Figura 4.4: Tensione tangenziale turbolenta

che nel tempo, anche lungo le direzioni di omogeneità x e z . Poiché le velocità $v(i, j, k)$ e $w(i, j, k)$ sono applicate in punti diversi, si decide di calcolare gli sforzi di Reynolds nei centri delle celle. Con l'ipotesi che la velocità nel centro di una cella sia pari alla media delle velocità sulle due facce opposte, cioè sia

$$v_I(i, j, k) = \frac{v_I(i, j, k) + v_I(i, j - 1, k)}{2}$$

e una relazione analoga valga per la componente w , si calcola:

$$\overline{v_I w_I}(j) = \frac{1}{t \, l_x \, l_z} \sum_{i,k,r} v_I(i, j, k, t_r) \, w_I(i, j, k, t_r) \, \Delta t_r \, l_{x_i} \, l_{z_k} \quad (4.2)$$

4.3.3 Energia cinetica turbolenta

L'energia cinetica turbolenta è definita:

$$k_t = \frac{1}{2}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) \quad (4.3)$$

e misura la media nel tempo dell'energia cinetica contenuta nelle fluttuazioni di velocità.

Le diverse componenti di velocità sono applicate in punti diversi della cella generica (i, j, k) , per questo motivo, per il calcolo dell'energia cinetica turbolenta, si valutano ciascuno dei tre addendi della 4.3 nel centro di ogni cella.

Se la deviazione standard delle tre componenti della velocità è una grandezza già disponibile al momento del calcolo dell'energia cinetica si può sfruttare l'uguaglianza $u_{rms}^2 = \overline{u'^2}$ per valutare:

$$k_t = \frac{1}{2}(u_{rms}^2 + v_{rms}^2 + w_{rms}^2)$$

al posto della 4.3. L'integrazione lungo la direzione di omogeneità z della deviazione standard delle componenti di velocità nei centri delle celle porta alla definizioni di tre variabili ausiliarie

$$\begin{aligned} u_z^2(i, j) &= \sum_k \frac{u_{rms}^2(i, j, k) + u_{rms}^2(i-1, j, k)}{2} dz(k) \\ v_z^2(i, j) &= \sum_k \frac{v_{rms}^2(i, j, k) + v_{rms}^2(1, j-1, k)}{2} dz(k) \\ w_z^2(i, j) &= \sum_k \frac{w_{rms}^2(i, j, k) + w_{rms}^2(i, j, k-1)}{2} dz(k) \end{aligned}$$

L'energia cinetica turbolenta si calcola dall'ulteriore integrazione nella direzione x .

$$k_t(j) = \frac{1}{2 l_x l_z} \sum_i [u_z^2(i, j) + v_z^2(i, j) + w_z^2(i, j)] l_{x_i}$$

4.3.4 Calcolo della vorticità

La vorticità è una grandezza associata al movimento rotatorio della corrente:

$$\vec{\omega} = \text{rot } \vec{v}$$

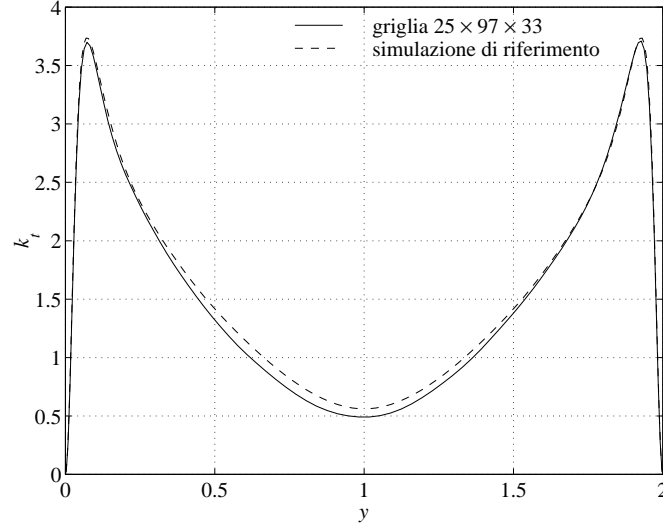


Figura 4.5: Energia cinetica turbolenta

Viene presentato il calcolo di ω_z ; con procedimenti simili si possono valutare le altre componenti. L'espressione della proiezione lungo z della vorticità:

$$\omega_z = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

in termini finiti, ω_z è calcolata per la cella (i, j, k) :

$$\omega_z(i, j, k) = 2 \left[\frac{v(i+1, j, k) - v(i, j, k)}{(l_{ni} + l_{ni+1})} - \frac{u(i, j+1, k) - u(i, j, k)}{(l_{ej} + l_{ej+1})} \right]$$

Il punto di applicazione di $\omega_z(i, j, k)$ è il punto medio del segmento tra i nodi $(i+1, j+1, k)$ e $(i+1, j+1, k+1)$; le altre componenti si calcolano in punti diversi; per questo bisogna effettuare delle interpolazioni prima di ottenere il vettore vorticità.

La vorticità media $\overline{\omega}_z(j)$ si calcola con l'integrazione nel tempo e nelle direzioni di omogeneità x e z della $\omega_z(i, j, k)$.

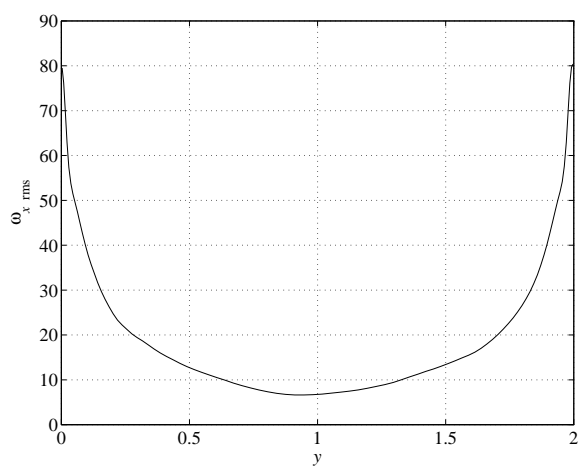


Figura 4.6: Deviazione standard della componente x di vorticità

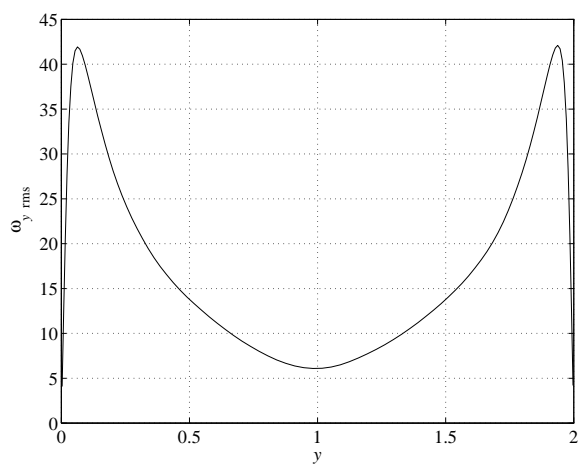


Figura 4.7: Deviazione standard della componente y di vorticità

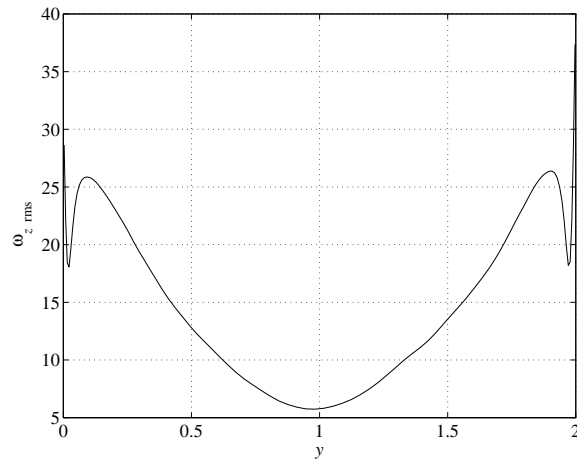


Figura 4.8: Deviazione standard della componente z di vorticità

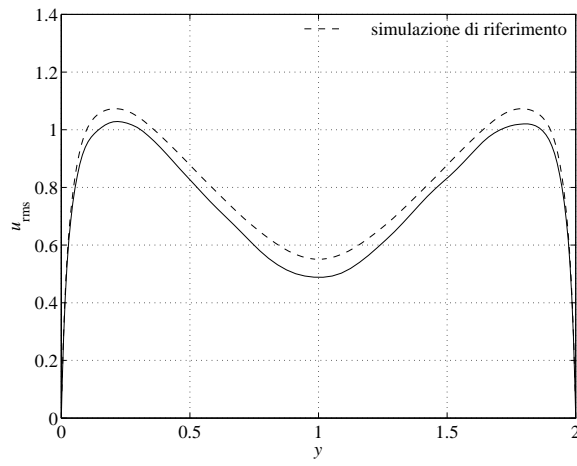


Figura 4.9: Deviazione standard della componente u di velocità

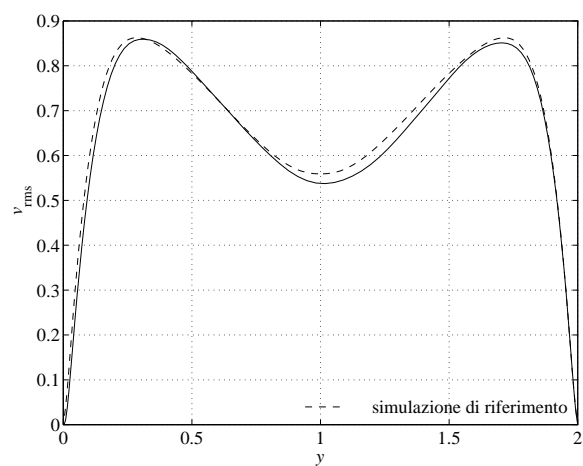


Figura 4.10: Deviazione standard della componente v di velocità

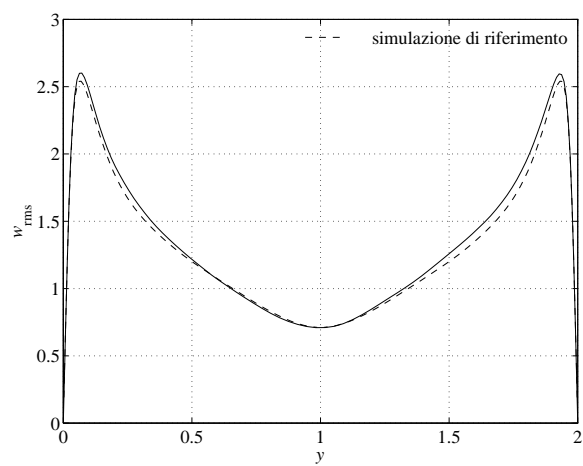


Figura 4.11: Deviazione standard della componente w di velocità

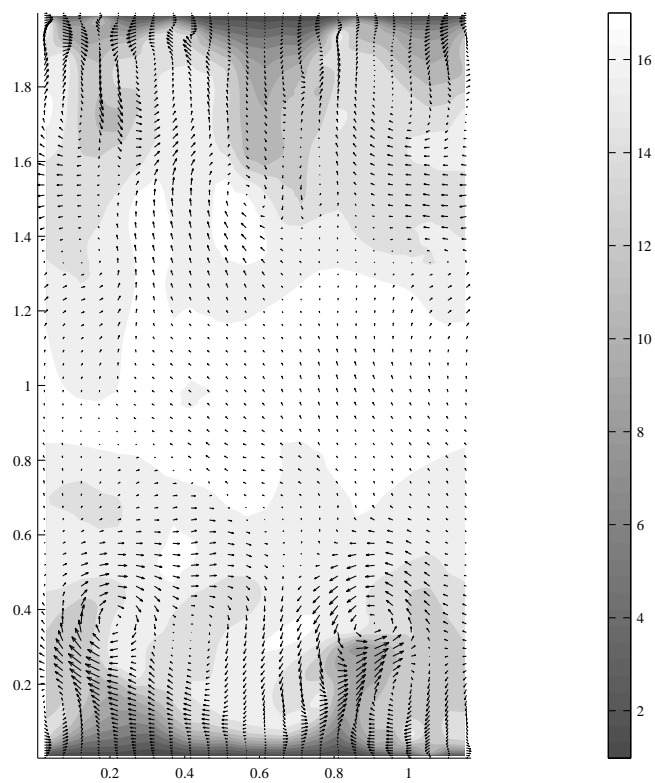


Figura 4.12: Istantanea delle tre componenti di velocità su un piano (x, y) : le superfici di livello indicano il valore della componente principale mentre i vettori rappresentano le componenti (u, v)

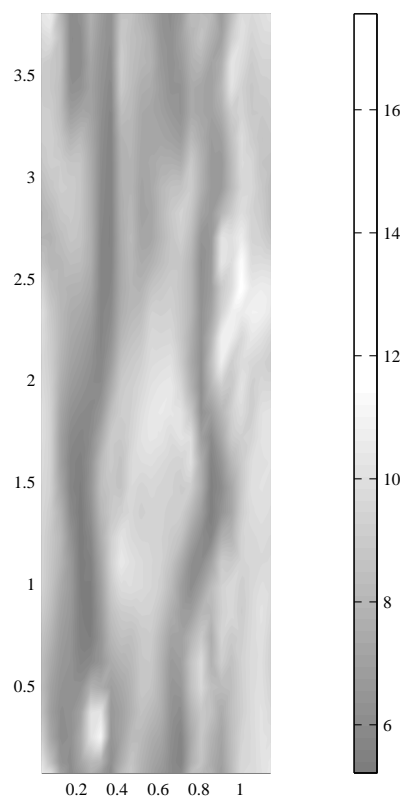


Figura 4.13: Istantanea della componente di velocità sul piano (x, z) a una altezza $y^+ = 16$; si possono apprezzare le bande di fluido rallentato rispetto la corrente media (*low-speed streaks*)

Capitolo 5

Flusso sulle *riblet*

Solo negli ultimi trent'anni si sono osservati nelle correnti turbolente eventi che si ripetono e sono in qualche misura prevedibili. Nei libri e negli articoli sull'argomento, come ad esempio [3, 9], si parla di *deterministic structure* o di *coherent structure*.

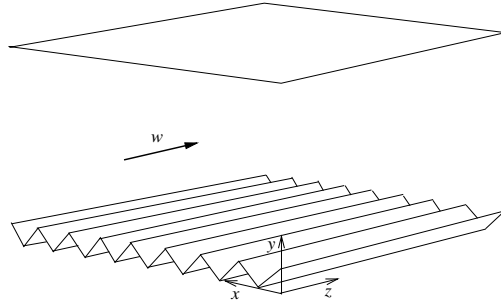
La scoperta della natura non esclusivamente casuale o imprevedibile della turbolenza e la constatazione che sono proprio questi eventi “deterministici” i responsabili della maggior parte del trasporto e del *mixing* turbolento, hanno lasciato intravedere la possibilità di esercitare un controllo sulle caratteristiche più importanti della turbolenza.

In questo capitolo presento un metodo passivo¹ per la riduzione della resistenza a parete, che consiste in una serie di scanalature, di forma e dimensioni diverse, scavate nella parete a contatto con il fluido, in direzione parallela a quella del moto medio. Queste scanalature si chiamano nella letteratura internazionale *riblet*.

5.1 La riduzione della resistenza

Le diverse ipotesi che sono state avanzate per spiegare il processo secondo cui le *riblet* intervengono sulla resistenza a parete, considerano due meccanismi che agiscono contemporaneamente. Il primo di questi si può

¹I metodi passivi di riduzione della resistenza a parete si differenziano dai metodi attivi in cui un evento riconosciuto da un sensore provoca l'azione di un attuatore.

Figura 5.1: Canale con le *riblet*

descrivere in generale come un'attenuazione del *ciclo di produzione della turbolenza* e in particolare del fenomeno di *bursting* che ne è il principale responsabile, mentre il secondo tiene conto della diminuzione dello sforzo d'attrito nelle valli delle scanalature.

Influenza delle *riblet* sul ciclo di produzione della turbolenza

Nel sottostrato viscoso e nello strato *buffer*, il flusso è sempre molto attivo ed è organizzato in una struttura in cui le ampie zone di fluido ad alta velocità sono intervallate da bande più strette di fluido a velocità più bassa che in inglese sono chiamate *low-speed streaks*; la loro presenza è dovuta al fenomeno di *bursting*, a sua volta strettamente legato alla temporanea presenza nello strato limite turbolento di coppie di vortici controrotanti, in direzione parallela al moto medio. Il fatto che zone di fluido a diverso contenuto di quantità di moto entrino in contatto provoca forti fluttuazioni turbolente e sforzi tangenziali di elevata intensità ed è in definitiva la causa principale della produzione della turbolenza e del conseguente aumento dell'attrito superficiale.

Una descrizione del fenomeno di *bursting* in sostanziale accordo con gli altri autori è fornita in [10] da un gruppo di studiosi del Politecnico di Milano:

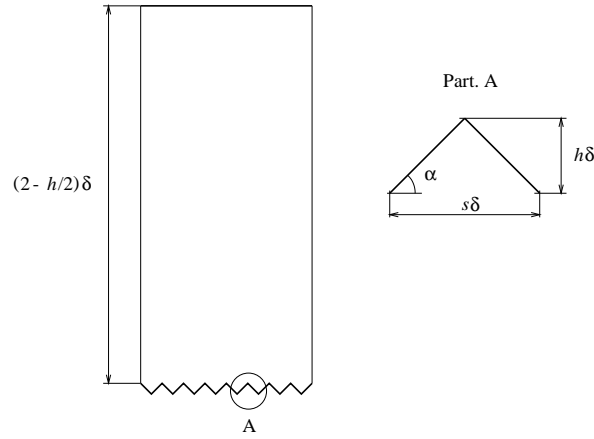


Figura 5.2: Sezione del canale con le *riblet*

Il *bursting* provoca l'immissione intermittente nello strato limite, di fluido a bassa velocità proveniente dal substrato viscoso prossimo alla parete. Tale immissione, che comporta un notevole trasporto di quantità di moto ed è responsabile di un aumento delle fluttuazioni turbolente, è conseguenza di un fenomeno di instabilità provocato dall'azione di vortici di perturbazione, controrotanti, allineati con la direzione della corrente media.

Le diverse interpretazioni dell'attenuazione del ciclo di produzione della turbolenza differiscono per la descrizione del meccanismo con cui ciò avviene a causa della presenza delle *riblet*. Sembra evidente che nessuno sia ancora riuscito a fornire una spiegazione del tutto soddisfacente.

In [10] si spiega come la presenza delle *riblet* provochi una riduzione della circolazione dei vortici controrotanti e che tale riduzione si verifica a causa della presenza di vortici secondari longitudinali che si formano in corrispondenza delle creste delle scanalature, se queste presentano bordi sufficientemente affilati.

Secondo altre interpretazioni [11], le estremità delle *riblet* impediscono, costituendo degli ostacoli, il trasporto e il *mixing* della quantità

di moto e di conseguenza della produzione di turbolenza in direzione normale al flusso e parallela alla parete.

Choi, Moin e Kim [9] propongono un'analisi ancora diversa, in cui il ciclo della produzione della turbolenza non è direttamente coinvolto. Per avanzare le loro ipotesi assumono anzitutto che i vortici che hanno influenza sul moto siano di diametro pari a circa 30 unità di parete; in correnti su *riblet* di larghezza $s^+ \cong 40$ o maggiore questi vortici si dispongono periodicamente nelle scanalature e il flusso indotto genera tensioni tangenziali di elevata intensità. Le *riblet* capaci di diminuire la resistenza a parete e cioè, secondo le loro valutazioni con $s^+ < 25$, al contrario non permettono ai vortici di introdursi nelle valli. Così, nei casi in cui solo l'estremità delle *riblet* è esposta alle tensioni generate dai vortici, la resistenza a parete diminuisce.

Le grandezze contrassegnate con un segno + sono espresse in unità di parete; con riferimento alla figura 5.2, una scanalatura di spessore adimensionale s (e spessore dimensionale $s\delta$) ha spessore, espresso in unità di parete $s^+ = w_\tau s / \nu$, con w_τ e ν quantità adimensionali.

Flusso a basso sforzo d'attrito negli avvallamenti

Le *riblet*, oltre ad attenuare il processo di produzione della turbolenza, offrono una bassa resistenza per l'esiguo contributo delle zone degli avvallamenti. Anche su questo argomento Baron, Quadrio e Vigeveno si sono espressi in modo molto chiaro:

Esiste però un secondo meccanismo peraltro contemporaneo al precedente, in grado di giustificare il funzionamento delle *riblet*. Nelle regioni corrispondenti agli avvallamenti e ai picchi delle *riblet* il fluido presenta una velocità media e un gradiente alla parete rispettivamente minori e maggiori rispetto a quelli che si avrebbero in un fluido che scorra, con la medesima velocità media, su una lastra piana. Le riduzioni del gradiente che hanno luogo negli avvallamenti agiscono su superfici più estese di quelle interessate dagli incrementi. Ne risulta quindi una riduzione netta del coefficiente d'attrito medio alla parete, che è tale da compensare l'aumento di superficie bagnata che la superficie scanalata inevitabilmente comporta.

Le critiche che sono state mosse a questa interpretazione riguardano soprattutto l'aspetto quantitativo della riduzione d'attrito, così alcuni

autori [12] affermano che non è mai stato verificato che il piccolo contributo delle valli alla resistenza riesca a compensare e superare gli elevati sforzi tangenziali sui picchi e l'aumento di superficie bagnata ma non mettono in dubbio la realtà di quei fenomeni.

5.2 Studio delle dimensioni ottimali

Esistono *riblet* di diverse forme: a L, U e V ma anche tridimensionali, in cui variazioni di altezza e spessore hanno luogo in direzione del flusso; di questo tipo sono anche i *dentelli cutanei* che si trovano sui fianchi degli squali e che sono stati replicati e sottoposti a prove nei laboratori della NASA di Langley.

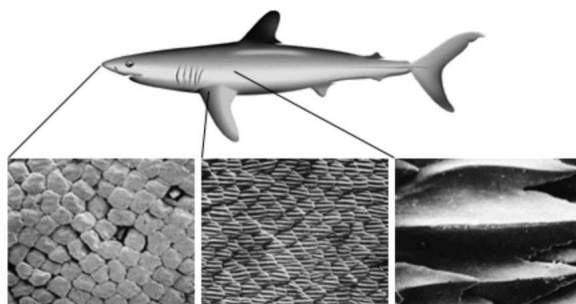


Figura 5.3: Ci sono pareri discordanti a proposito della capacità di riduzione della resistenza dei dentelli cutanei sui fianchi degli squali.

Per motivi di semplicità di costruzione e di robustezza l'attenzione degli studiosi si è concentrata sulle scanalature di sezione triangolare, simmetrica. Le indicazioni che si trovano in letteratura sul dimensionamento delle riblet a sezione triangolare riguardano normalmente lo spessore massimo in unità di parete che consente una riduzione della resistenza; a seconda degli autori tale limite varia solo lievemente: $s^+ < 25 \div 30$.

Indicazioni più esaurienti per il dimensionamento delle *riblet* si tro-

vano in [10] dove i dati sperimentali di resistenza aerodinamica reperibili in letteratura vengono correlati con il parametro *altezza di protrusione*.

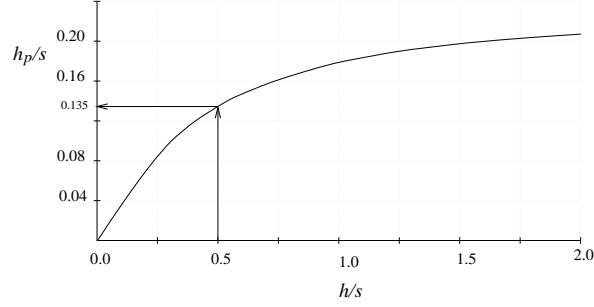
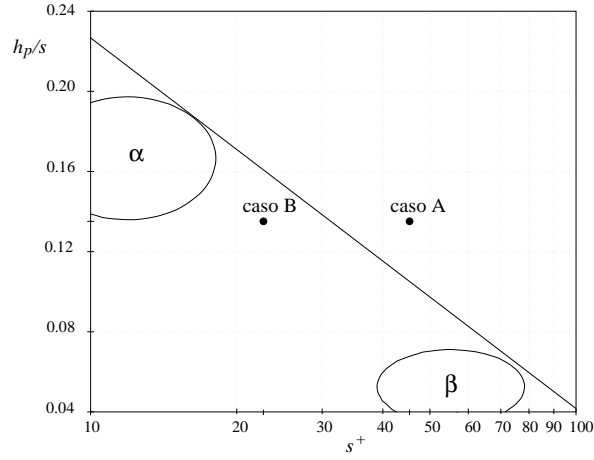


Figura 5.4: Altezza di protrusione per *riblet* di sezione triangolare.

L'altezza di protrusione h_p si può definire come la distanza dalla cima delle *riblet* del baricentro della distribuzione degli sforzi tangenziali di parete, ovvero come l'altezza h meno l'altezza dell'origine apparente dei profili di velocità media e può essere calcolata analiticamente per una data geometria; il diagramma di figura 5.4 permette di ricavare l'altezza di protrusione per *riblet* di sezione triangolare. Utilizzando per s^+ una scala logaritmica è possibile discriminare con una retta nel piano ($\text{Log } s^+, h_p/s$) della figura 5.5 le configurazioni che permettono una effettiva diminuzione della resistenza d'attrito da quelle che, al contrario, la peggiorano. Sullo stesso diagramma si possono individuare due regioni, denominate α e β , all'interno delle quali l'azione delle scanalature risulta particolarmente efficace e sono evidenziati i punti corrispondenti alle geometrie che si tratteranno nel paragrafo 5.3.

La presenza di due regioni distinte in cui il meccanismo di riduzione della resistenza è più efficiente trova una giustificazione nella diversa dipendenza dalla spaziatura laterale s^+ dei due meccanismi di interazione tra le scanalature e lo strato limite.


 Figura 5.5: Diagramma per il dimensionamento delle *riblet*

5.3 Simulazione del flusso sulle *riblet*

Si sono condotte due simulazioni a $Re_\tau = 200$ su canali, del tipo schematizzato in figura 5.1 la cui parete superiore è costituita da una superficie piana mentre il fondo è una superficie con scanalature di forma triangolare, simmetrica. I canali su cui si sono condotte le due simulazioni si differenziano per la dimensione delle *riblet* e di conseguenza per i valori di resistenza sulla parete scanalata. In particolare ci si attende che nella prima simulazione, il caso A, la parete con le *riblet* offra più resistenza al moto della parete piana mentre dal caso B ci si attende una diminuzione della resistenza.

Le dimensioni del dominio di calcolo, la forma e le dimensioni delle *riblet* sono le stesse utilizzate in [9] per una serie di simulazioni a $Re_\tau = 180$; anche il numero di nodi delle griglie di calcolo ricalcano quelli delle simulazioni effettuate da Choi, Moin e Kim ma, nel nostro caso, sono più rade in direzione perpendicolare alle pareti. Le *riblet* su cui si è simulato il flusso hanno un angolo rispetto all'orizzontale $\alpha = 45^\circ$; il fondo del canale del caso A ha quattro scanalature di spessore $s = 0.227$,

mentre nel caso B le scanalature sono otto, di spessore $s = 0.113$; le notazioni usate sono quelle della figura 5.2 e i valori numerici sono raccolti nella tabella 5.1.

	(l_x, l_y, l_z)	$(n \times m \times p)$	s	s^+	h	h^+
caso A	$(0.289 \pi, 2, \pi)$	$(121 \times 74 \times 19)$	0.227	45	0.113	23
caso B	$(0.289 \pi, 2, \pi)$	$(241 \times 74 \times 16)$	0.113	23	0.056	11

Tabella 5.1: Dimensioni del canale con le *riblet*

5.3.1 Raccolta delle grandezze statistiche

I calcoli condotti per la raccolta delle grandezze statistiche in coordinate cartesiane sono descritti nel paragrafo 4.1 e in [6]. In realtà le equazioni sviluppate nel programma sono più generali e applicabili a simulazioni in coordinate curvilinee mentre si riducono solo nel caso particolare delle coordinate cartesiane alla forma del capitolo 4.

Il problema è che, anche se in questa particolare applicazione quelle relazioni si sono dimostrate precise fintantoché hanno dato risultati in ottima concordanza con quelli ottenuti da autori più illustri [9], la loro validità teorica e la loro accuratezza su un sistema generico di coordinate curvilinee ortogonali è da verificare; per esempio, l'equazione utilizzata per il calcolo della tensione tangenziale turbolenta è:

$$\overline{v w'}(j) = \frac{1}{t l_{\xi_j} l_z} \sum_{i,j,r} v_{c'}(i, j, k, t_r) w_{c'}(i, j, k, t_r) \Delta t_r l_{\xi}(i, j) l_z(k)$$

dove si è definito:

$$l_{\xi_j} = \sum_{i=1}^{n-1} l_{\xi}(i, j)$$

si vede immediatamente come essa si riduca alla 4.2 nel caso sia calcolata su coordinate cartesiane.

5.3.2 Risultati

In questo paragrafo vengono riportati e commentati, tenendo conto di quanto scritto allo stesso proposito in [9], i grafici che rappresentano le più importanti grandezze statistiche raccolte durante le simulazioni del flusso sulle *riblet*. I profili relativi al caso B sono irregolari per il fatto che l'intervallo di tempo su cui si sono mediate le grandezze è troppo breve.

Legge logaritmica di parete

La traslazione del profilo di velocità verso valori più elevati della legge logaritmica di parete che si osserva in figura 5.7, è tipica dei flussi la cui resistenza è diminuita oltre che con le *riblet*, anche con altre tecniche come i *large eddy breakup device* o l'aggiunta di polimeri e può esser considerata come il risultato dell'accresciuto spessore del sottostrato viscoso. Osservazioni opposte e tendenze opposte (vedi figura 5.6) valgono per i flussi con resistenza elevata.

Moto medio secondario nelle vicinanze delle *riblet*

Il moto secondario medio del caso con $s^+ = 23$ trasporta quantità di moto dalla zona centrale, vicino alla punta, verso le valli e poi di nuovo dalle valli, lungo il fianco delle *riblet* alla punta; il caso con $s^+ = 45$ presenta invece moti secondari più complicati. I vettori delle figure 5.8 e 5.9 sono in scala e le loro dimensioni mettono in evidenza che il moto medio secondario del caso A è molto più intenso.

Profili di intensità della turbolenza

I profili della deviazione standard delle tre componenti di velocità per i due casi studiati sono riportati da figura 5.10 a figura 5.15, per diverse posizioni x sulle scanalature. La riduzione delle fluttuazioni di velocità causata dalla presenza delle *riblet* è visibile nella configurazione che riduce la resistenza mentre la tendenza opposta si nota nella configurazione che aumenta la resistenza.

Sforzi di Reynolds

Nel caso con $s^+ = 23$, rappresentato in figura 5.17, la tensione tangenziale turbolenta sulla parete scanalata è minore rispetto alla parete piana e la grandezza non subisce variazioni di rilievo in direzione x ; invece nel caso con $s^+ = 45$, come si vede in figura 5.16, la tensione tangenziale turbolenta varia in x e assume sulla cresta delle *riblet* valori leggermente più elevati di quelli relativi alla parete piana.

Deviazione standard della vorticità

Nella configurazione che riduce la resistenza si notano fluttuazioni della vorticità solo molto vicino alle *riblet* mentre nel caso con $s^+ = 45$ la penetrazione nel canale è più accentuata. Si nota una riduzione delle fluttuazioni delle tre componenti di vorticità dovuta alla presenza delle *riblet* nella configurazione che diminuisce la resistenza.

Energia cinetica turbolenta

Il profilo di energia cinetica turbolenta riportato nella figura 5.25 indica un'elevata attività turbolenta sulla parete scanalata del caso B; per confermare o smentire questo risultato è necessario, come spiegato nel paragrafo 5.4.2, un periodo di raccolta delle statistiche molto più lungo.

Inversione del moto nelle valli

A proposito di una questione sorta tra due diversi gruppi di studiosi e cioè se ci sia o meno inversione di moto nelle valli delle scanalature (vedi figura 5.26), ci schieriamo dalla parte di Choi, Moin e Kim [9] nell'affermare che se velocità w negative si osservano sporadicamente nelle valli, sono probabilmente da attribuire a imprecisioni del calcolo piuttosto che a un fenomeno fisico come lo *splatting effect* di cui parlano Chu e Karniadakis in [11]; questo in considerazione del fatto che le velocità negative sono state riscontrate esclusivamente nel primo piano di volumi di controllo e non superano mai in intensità lo 0.5 % della velocità massima.

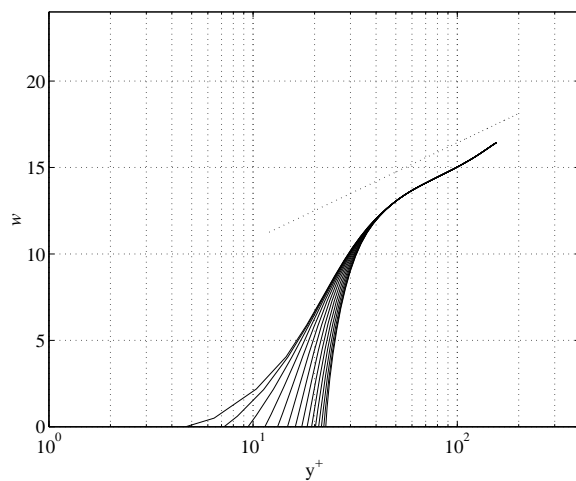


Figura 5.6: Confronto con la legge logaritmica di parete (caso A)

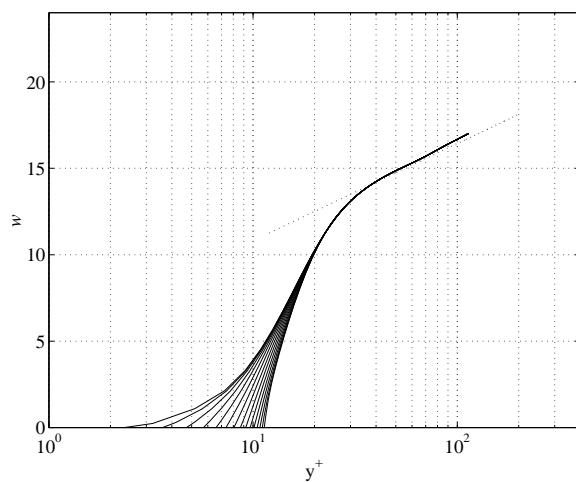


Figura 5.7: Confronto con la legge logaritmica di parete (caso B)

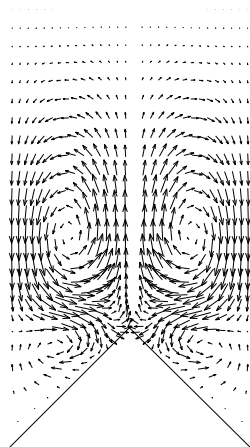


Figura 5.8: Moti secondari medi (caso A)

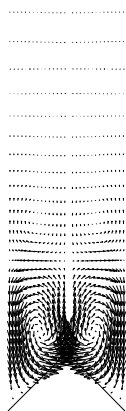


Figura 5.9: Moti secondari medi (caso B)

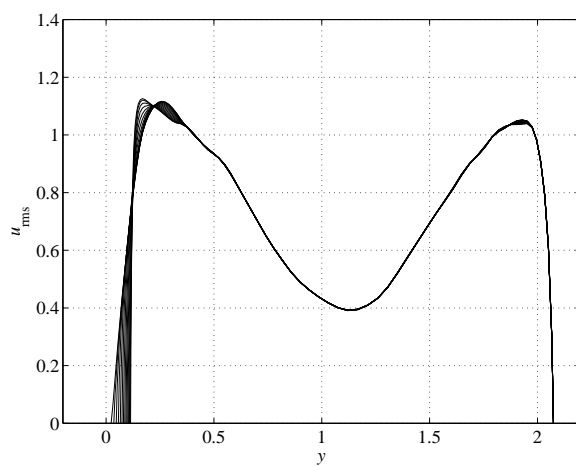


Figura 5.10: Deviazione standard della componente u di velocità (caso A)

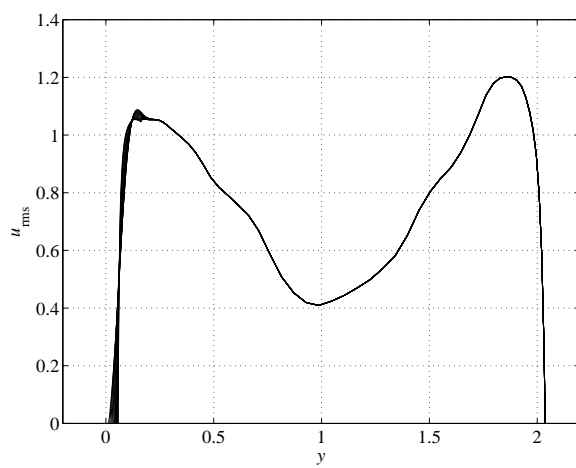


Figura 5.11: Deviazione standard della componente u di velocità (caso B)

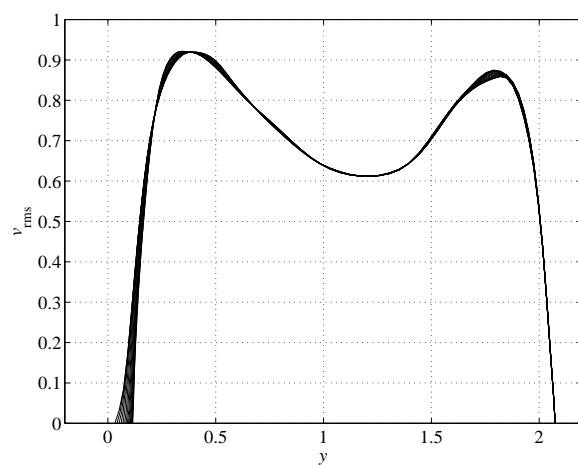


Figura 5.12: Deviazione standard della componente v di velocità (caso A)

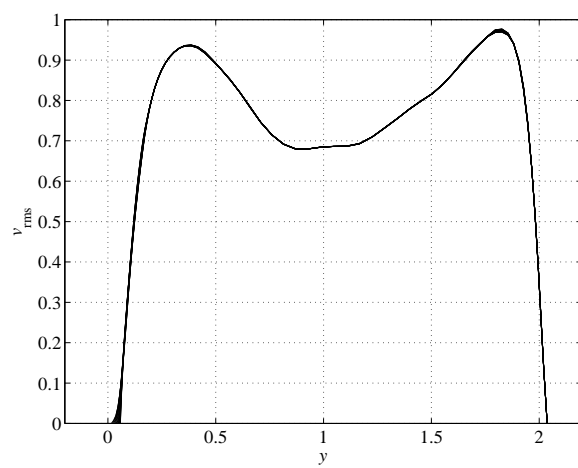


Figura 5.13: Deviazione standard della componente v di velocità (caso B)

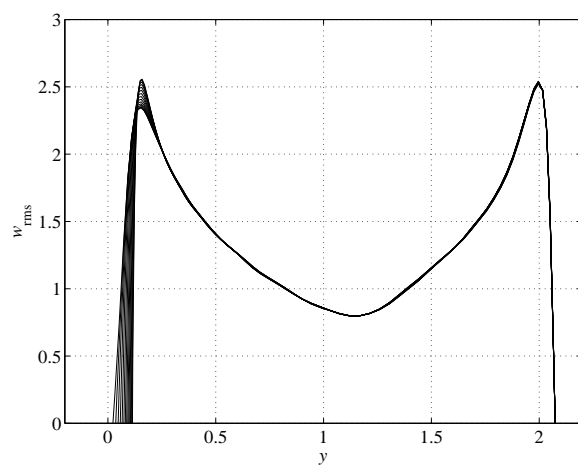


Figura 5.14: Deviazione standard della componente w di velocità (caso A)

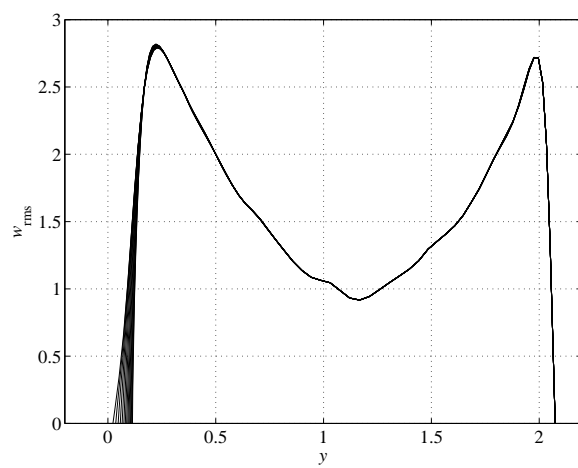


Figura 5.15: Deviazione standard della componente w di velocità (caso B)

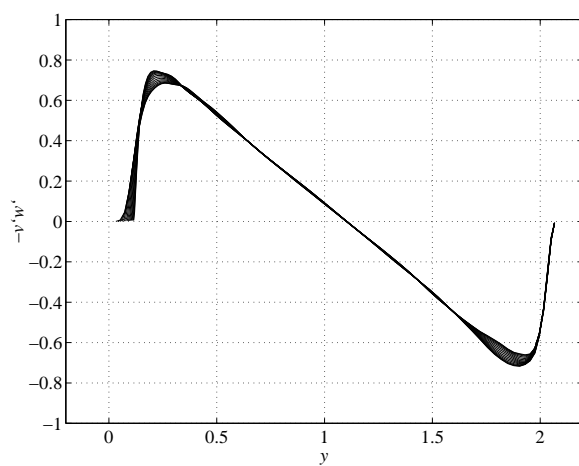


Figura 5.16: Profilo della tensione tangenziale turbolenta (caso A)

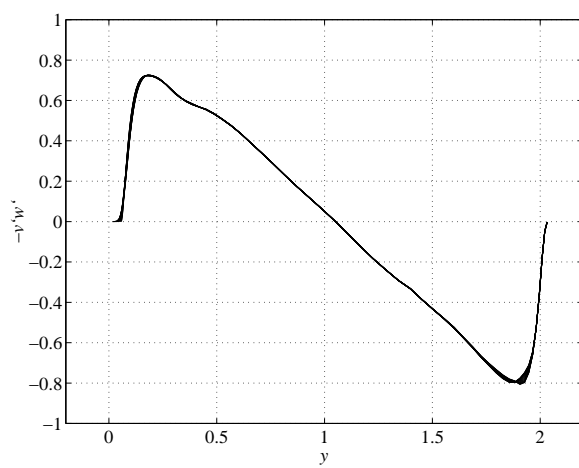


Figura 5.17: Profilo della tensione tangenziale turbolenta (caso B)

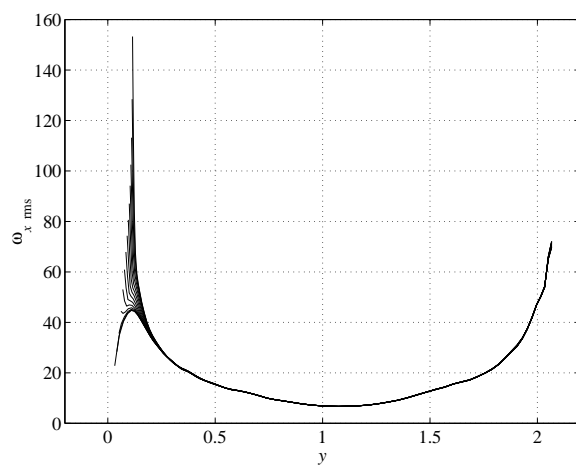


Figura 5.18: Deviazione standard della componente x di vorticità (caso A)

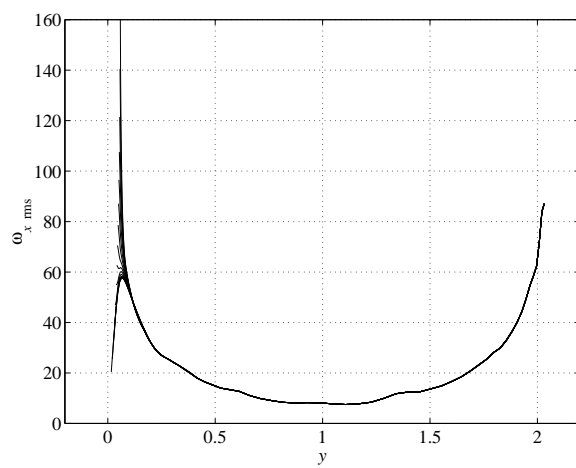


Figura 5.19: Deviazione standard della componente x di vorticità (caso B)

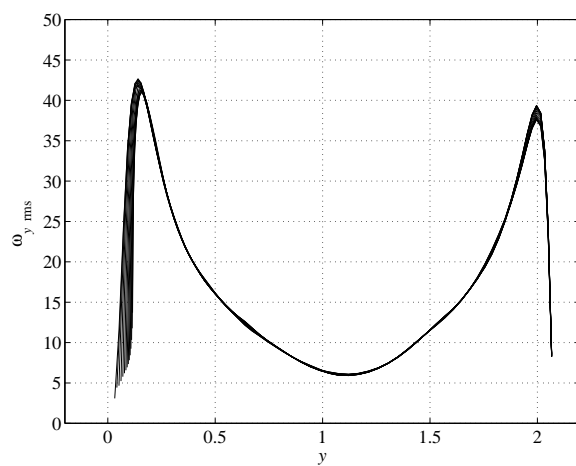


Figura 5.20: Deviazione standard della componente y di vorticità (caso A)

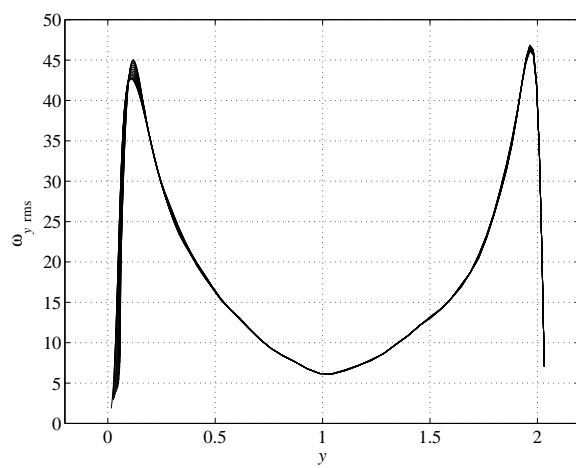


Figura 5.21: Deviazione standard della componente y di vorticità (caso B)

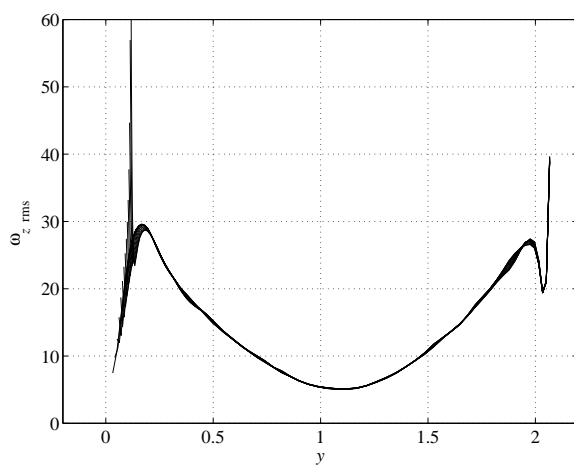


Figura 5.22: Deviazione standard della componente z di vorticità (caso A)

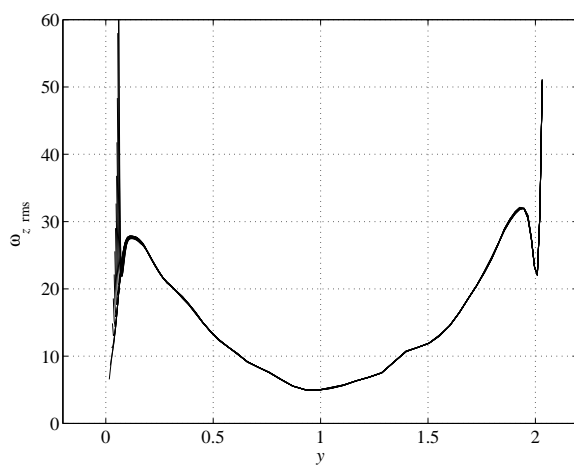


Figura 5.23: Deviazione standard della componente z di vorticità (caso B)

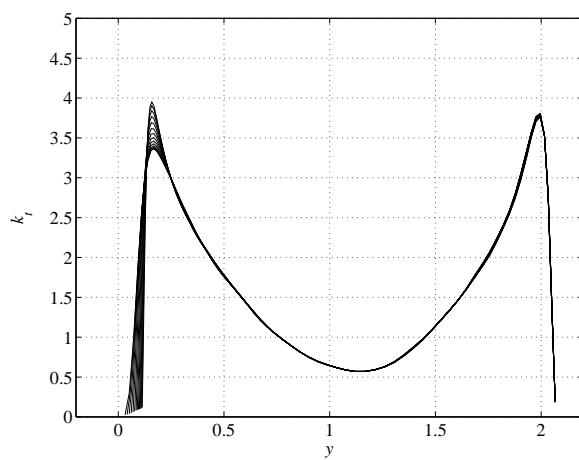


Figura 5.24: Profilo dell'energia cinetica turbolenta (caso A)

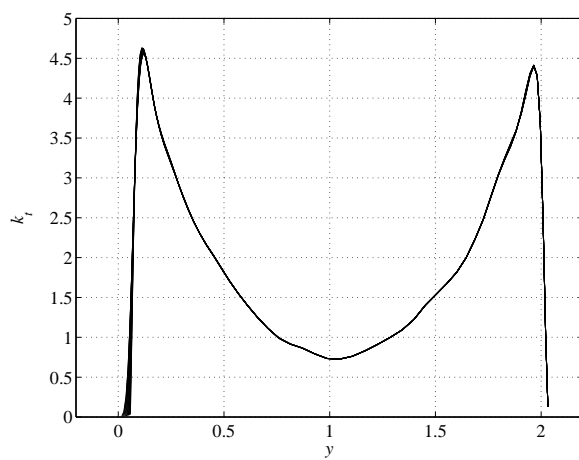


Figura 5.25: Profilo dell'energia cinetica cinetica turbolenta (caso B)

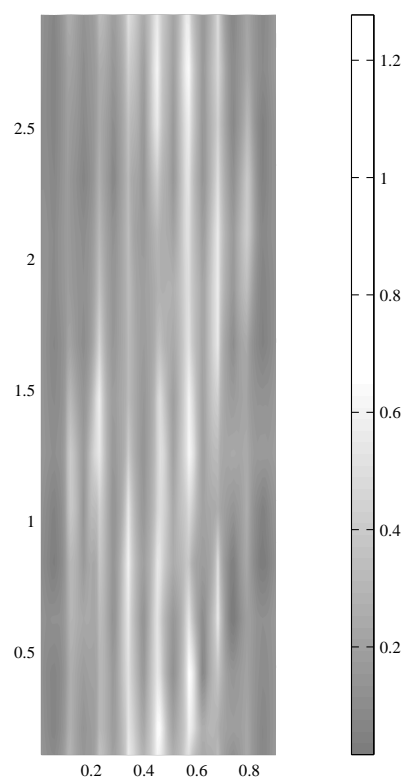


Figura 5.26: Istantanea della componente di velocità sul piano (ξ, z) a $\eta^+ = 1$

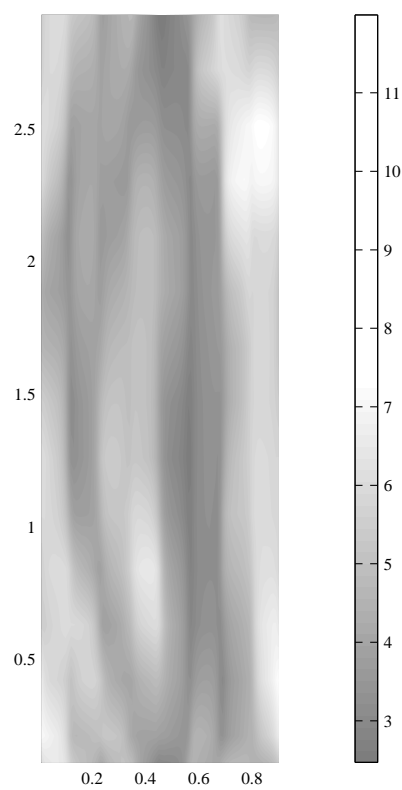


Figura 5.27: Istantanea della componente di velocità sul piano (ξ, z) a $y^+ = 16$

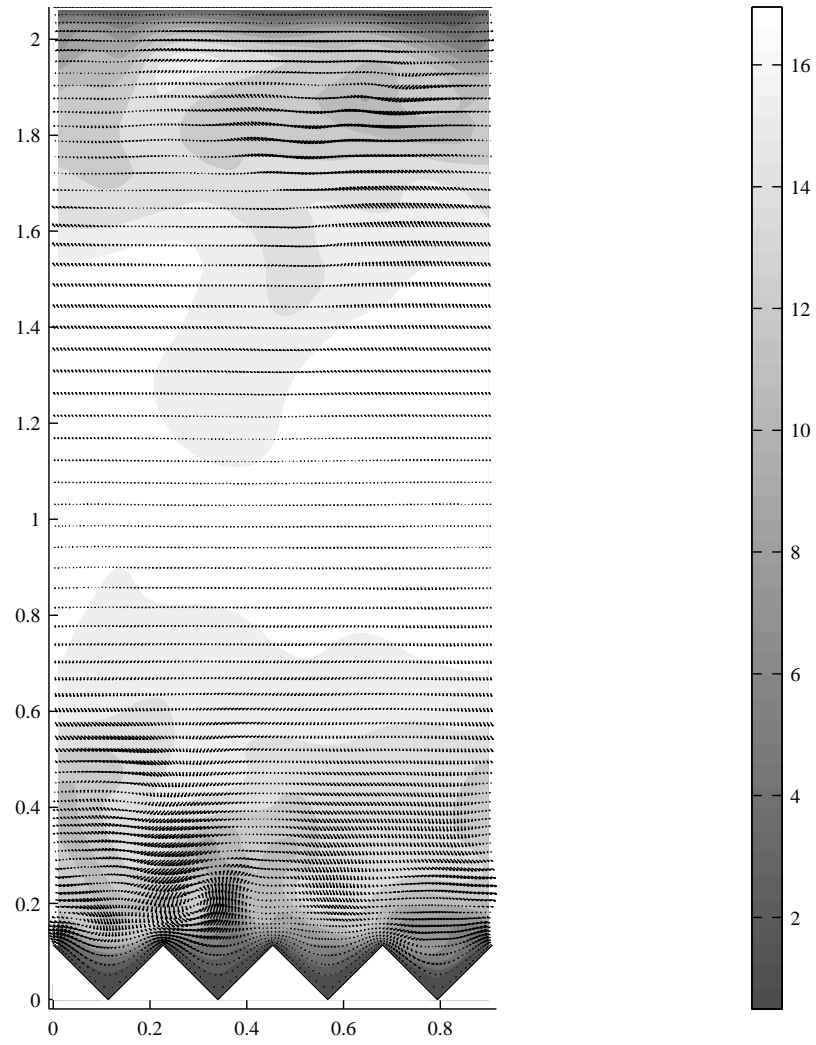


Figura 5.28: Istantanea delle tre componenti di velocità su un piano (ξ, η) : le superfici di livello indicano il valore della componente principale w mentre i vettori rappresentano le componenti secondarie (u, v)

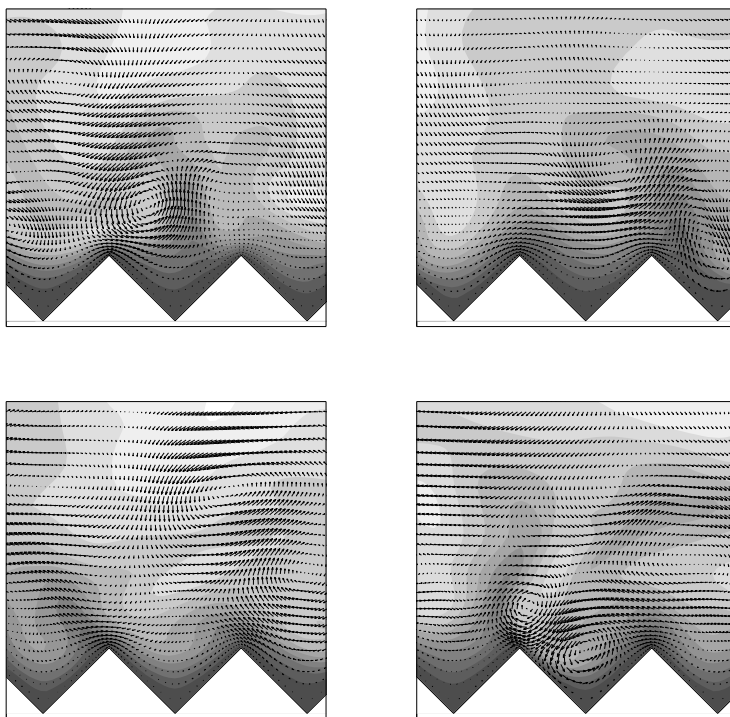


Figura 5.29: Dettaglio del campo di moto in quattro diversi istanti su un piano (ξ, η) . Le superfici di livello indicano il valore della componente principale w mentre i vettori rappresentano le componenti secondarie (caso A)

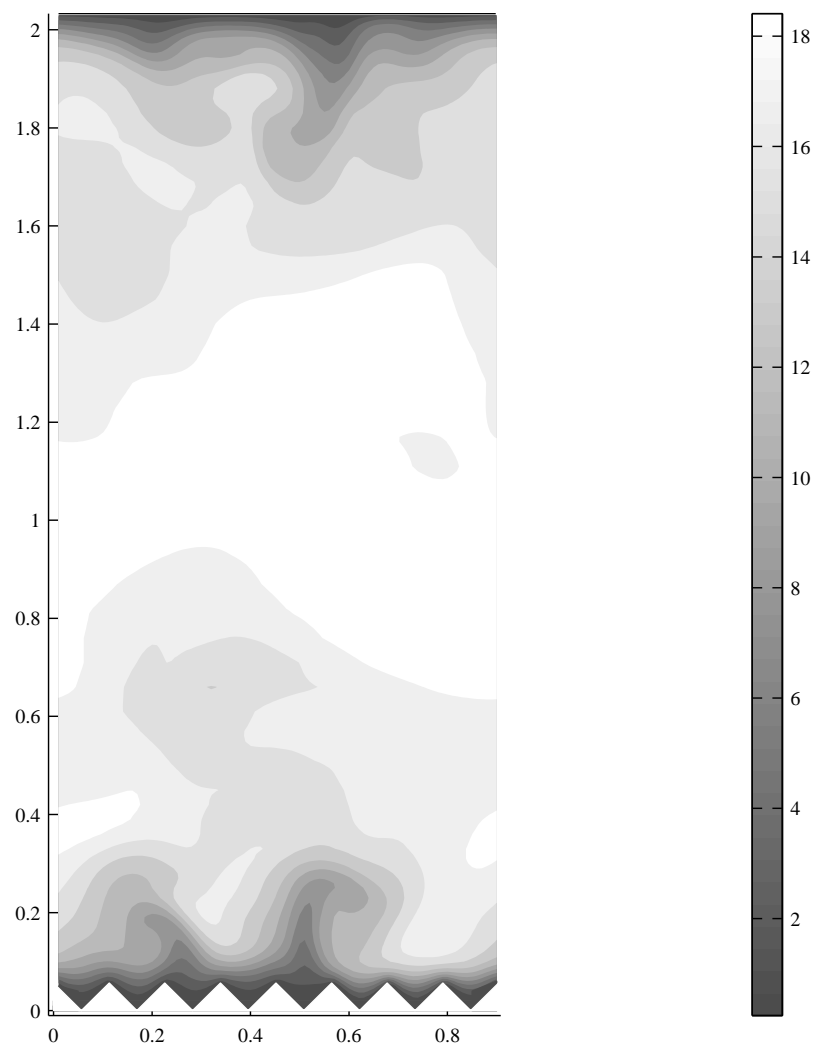


Figura 5.30: Istantanea della componente di velocità principale w su un piano (ξ, η)

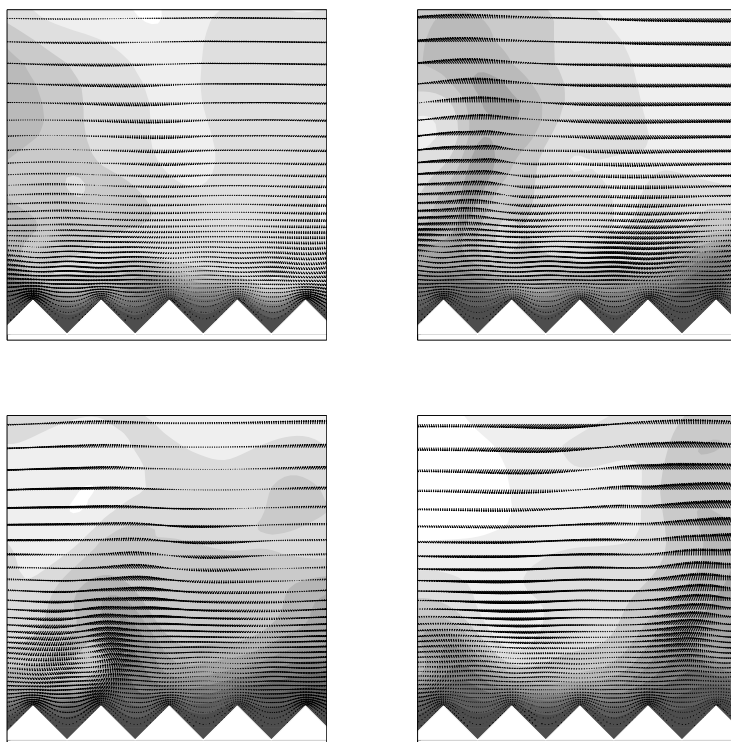


Figura 5.31: Dettaglio del campo di moto in quattro diversi istanti su un piano (ξ, η) . Le superfici di livello indicano il valore della componente principale w mentre i vettori rappresentano le componenti secondarie (caso B)

5.4 Misura della resistenza

La resistenza media è l'integrale del prodotto tra lo sforzo di taglio a parete e l'area infinitesima su cui quello sforzo agisce.

La variazione di resistenza dovuta alla presenza delle *riblet* è calcolata dal confronto tra la resistenza opposta dalla parete piana e da quella corrugata; questo tipo di valutazione ha senso sulla base dell'osservazione, fatta in [9], che il flusso turbolento su una parete del canale non condiziona la resistenza dell'altra. Le espressioni per la resistenza istantanea sulla parete piana D_f e quella sulla parete scanalata D_r sono:

$$D_f = \mu \int_{A_f} \frac{\partial w}{\partial n} dA_f$$

$$D_r = \mu \int_{A_r} \frac{\partial w}{\partial n} dA_r$$

dove n è la coordinata normale alla superficie e A_r e A_f denotano rispettivamente la superficie bagnata della parete scanalata e di quella piana.

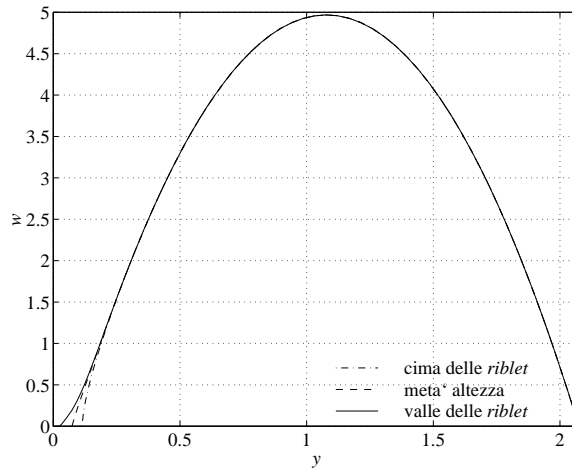
A causa delle dimensioni limitate del dominio di calcolo e del ristretto numero di campioni raccolti in un passo di tempo, conviene calcolare una media nel tempo della resistenza alle due pareti:

$$D = \mu \frac{1}{T} \int_0^T \int_A \frac{\partial w}{\partial n}(t) dA dt$$

5.4.1 Valori di resistenza in regime laminare

In regime laminare, il flusso sulle *riblet* è bidimensionale cioè variabile solo in direzione x e y ; l'unica componente di velocità non nulla è quella in direzione z . Il profilo di w in funzione di y , da tre diversi punti sul fianco delle *riblet* è riportato in figura 5.32.

I calcoli di resistenza in regime laminare sono stati condotti su canali di dimensioni $(0.227 \times 2.0 \times 3.14)$ a un numero di Reynolds $Re_\tau = 10$, con *riblet* delle stesse dimensioni dei casi A e B del regime turbolento. La griglia utilizzata per il caso A, laminare, è di $(31 \times 74 \times 6)$ nodi mentre quella del caso B, siccome il dominio di calcolo comprende due *riblet*, di

Figura 5.32: Profili della componente w $Re_\tau = 10$

($61 \times 74 \times 6$) nodi. I valori del rapporto D_r/D_f , mediati in un intervallo di tempo T di circa $50 \delta/w_\tau$, sono riportati nella tabella 5.2.

	D_r/D_f
canale piano	1.000
caso A	1.026
caso B	1.013

Tabella 5.2: Valori di resistenza in regime laminare $Re_\tau = 10$

In regime laminare, poiché la riduzione della resistenza nelle valli non eguaglia l'aumento che ha luogo sulle punte, le *riblet* non hanno in nessun caso un effetto positivo sulla resistenza.

A proposito dell'incremento di resistenza più accentuato che si è riscontrato nel caso A, con scanalature più larghe e profonde, si può dire che siccome l'angolo rispetto l'orizzontale è eguale nei due casi, anche la superficie bagnata è la stessa e la diversità del rapporto D_r/D_f è dovuta

esclusivamente al fatto che *riblet* immerse più in profondità nel flusso, hanno superfici più ampie a contatto con elevati gradienti di velocità.

5.4.2 Valori della resistenza in regime turbolento

Siccome i valori di resistenza a parete in regime turbolento subiscono ampie e lunghe fluttuazioni, per ottenere dei valori medi di qualche significato l'integrazione nel tempo deve avvenire per periodi di tempo adeguati. Una stima dell'accuratezza della misura di D_r/D_f in un certo intervallo di integrazione T si può ottenere dal confronto dei valori medi, in quell'intervallo, della resistenza su due pareti piane.

Nella tabella 5.3 sono riportati i dati raccolti durante le simulazioni nel canale piano e sulle due diverse geometrie di *riblet*, assieme al valore, indicato con T dell'intervallo di integrazione. Si noti che per la raccolta dati troppo breve, il valore del rapporto D_r/D_f per il caso B è di significato solo indicativo.

	T	D_r/D_f
canale piano	41	0.99
caso A	23	1.09
caso B	4	0.98

Tabella 5.3: Valori di resistenza e periodo di integrazione

Nella tabella 5.4, le medie temporali del rapporto D_r/D_f calcolate con il nostro programma sono messe a confronto con i dati delle simulazioni effettuate da Choi, Moin e Kim sulle stesse geometrie e numero di Reynolds inferiore ($Re_\tau = 180$) e con i dati sperimentali di Walsh su *riblet* di geometria simile.

	questo lavoro	Choi	Walsh
caso A	1.09	1.02	1.03
caso B	0.98	0.95	0.98

Tabella 5.4: Valori del rapporto D_r/D_f , confronto con altri autori

Il valore più elevato del rapporto D_r/D_f riscontrato nel caso A ri-

petto gli altri autori è dovuto alle diverse condizioni di moto in cui sono avvenute le simulazioni oppure, se si preferisce, alla diversa larghezza espressa in unità adimensionali delle *riblet* : $s^+ = 45$ per il nostro lavoro e $s^+ = 40$ per Choi, Moin e Kim. Si ribadisce il fatto che il valore ottenuto nel caso B ha valore solo indicativo.

5.5 Le *riblet* e la trasmissione del calore

Choi e Orchard [13] hanno condotto degli esperimenti in una galleria del vento per confrontare la trasmissione di calore di una superficie con scanalature triangolari con quella di una superficie piana di costruzione identica.

I risultati delle misure indicano che il coefficiente di trasmissione termica sulla superficie corrugata è più elevato del 10%; il profilo di temperatura nel diagramma logaritmico ha la stessa pendenza di quello relativo alla superficie piana ma valori inferiori, indicando che lo spessore del sottostrato di conduzione è diminuito dalla presenza delle *riblet*. Si verifica quindi un aumento del gradiente di temperatura media in prossimità della superficie delle scanalature che a sua volta giustifica l'aumento osservato sperimentalmente del coefficiente di scambio termico convettivo.

Sulle stesse superfici corrugate Choi e Orchard hanno misurato un profilo di velocità media che, in accordo con gli altri autori [9, 11, 14] e come si osserva anche nei flussi in cui la resistenza viene ridotta con altri metodi, ha la stessa pendenza della legge logaritmica di parete per pareti piane ma valori più alti.

Un parametro con cui si può esprimere l'efficacia dello scambio termico delle superfici scanalate rispetto al miglioramento della resistenza è il *Reynolds analogy factor* ovvero la formulazione fondamentale dell'analogia di Reynolds secondo cui esiste una similitudine tra i processi di trasporto di calore e di quantità di moto in una corrente turbolenta:

$$\frac{2St}{C_f}$$

dove C_f è il coefficiente di attrito a parete e St il numero di Stanton, un parametro adimensionale che è indicativo dell'intensità dello scambio

termico:

$$St = \frac{q_w}{\rho_e w_e^2 c_p (T_w - T_e)}$$

le grandezze con pedice e sono valutate sul bordo dello strato limite, q_w è il flusso di calore alla parete e c_p il calore specifico a pressione costante.

Le superfici non piane generalmente mostrano valori del *Reynolds analogy factor* minori di quelli relativi a una lastra piana sebbene l'aumento di superficie di scambio aumenti il flusso termico; le *riblet* sembrano seguire la tendenza opposta, e portano ad affermare [13] che in questo caso l'analogoia di Reynolds viene violata.

Pochi studi hanno riguardato finora questo argomento mentre è di sicuro interesse nel settore dello scambio termico ad alte prestazioni; l'importante problema del dimensionamento di *riblet* con valore ottimale del *Reynolds analogy factor* sarà certamente oggetto di future indagini.

5.6 Applicazioni delle *riblet*

La resistenza all'avanzamento degli attuali velivoli subsonici commerciali è dovuta, per un terzo e in alcuni casi la metà, alla resistenza d'attrito²; tali valori sono ancora più elevati se si considerano i mezzi di trasporto navali o sottomarini: per questi ultimi l'attrito genera la quasi totalità delle forze resistive.

Le *riblet* possono essere applicate ai mezzi di trasporto aereo, navale e sottomarino e, come si legge in [12] a proposito del trasporto aereo, solo i problemi che riguardano la fabbricazione, l'applicazione delle superfici corrugate e la sicurezza stanno ritardando il loro effettivo utilizzo. Già nel 1989 i primi test di volo hanno dato risultati soddisfacenti: la fusoliera, le ali, la coda, e in totale i tre quarti di un aereo della *Airbus Industrie* (un consorzio europeo di costruttori di aeroplani, con sede in Francia) sono stati ricoperti da *riblet* di dimensioni ottimali per le condizioni di crociera, permettendo in media un risparmio di combustibile dell'1.5 %.

Impiegate sotto la carena dell'imbarcazione da regata *Stars & Stripes* nell'edizione del 1987 dell'*America's Cup*, le *riblet* possono avere effetti

²La quota restante è attribuibile soprattutto alla resistenza indotta dalla portanza, a fenomeni di interferenza e alla presenza di onde.

positivi anche se applicate sulle vele; si legge in [15] che le *riblet*, applicate su entrambi i lati delle vele di un'imbarcazione, senza modificare la resistenza, hanno incrementato la spinta del 5%.

Le superfici corrugate trovano applicazione anche per i moti interni: misure effettuate in tubazioni [16] mostrano riduzioni della resistenza dell'otto per cento, con *riblet* di spessore ottimale $s^+ = 23$.

Appendice A

Il *Poisson solver* in tre dimensioni

Si ricerca la soluzione per via numerica dell'equazione $\nabla^2\phi = c$ di Poisson, definita su un dominio tridimensionale Ω :

$$\Omega = \{\xi, \eta, z : \xi \in [\xi_{min}, \xi_{max}], \eta \in [\eta_{min}, \eta_{max}], z \in [z_{min}, z_{max}]\}$$

Sui bordi a η costante sono applicate condizioni al contorno di Neumann e in particolare si impone l'annullamento della derivata di ϕ in direzione normale al bordo: $(\partial\phi/\partial\vec{n}) = 0$; sul resto del contorno sono applicate condizioni di periodicit .

L'equazione di Poisson si scrive in forma integrale:

$$\int_V \nabla^2\phi \, dV = \int_V c \, dV$$

Il teorema di Gauss-Green permette di esprimere l'integrale su un volume con un flusso attraverso la sua superficie esterna:

$$\int_V \nabla^2\phi \, dV = \int_S \nabla\phi \cdot \vec{n} \, dS$$

L'integrazione avviene sul volume di una cella di dimensione infinitesima e si esprime il flusso uscente come somma dei flussi da ciascuna faccia

per ottenere l'equazione:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \Big|_s d\eta_s dz - \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \Big|_n d\eta_n dz + \\
 & + \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_e d\eta_e dz - \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_w d\eta_w dz + \\
 & + \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_t dS_z - \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_b dS_z = c dV
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

che tradotta in forma discreta con approssimazioni delle derivate del secondo ordine e secondo il metodo delle differenze centrali si scrive:

$$\begin{aligned}
 & 2 \frac{l_s(i, j) l_z(k)}{l_\eta(i, j) + l_\eta(i, j-1)} (\phi(i, j-1, k) - \phi(i, j, k)) + \\
 & + 2 \frac{l_w(i, j) l_z(k)}{l_\xi(i, j) + l_\xi(i-1, j)} (\phi(i-1, j, k) - \phi(i, j, k)) + \\
 & + 2 \frac{l_e(i, j) l_z(k)}{l_\xi(i, j) + l_\xi(i+1, j)} (\phi(i+1, j, k) - \phi(i, j, k)) + \\
 & + 2 \frac{l_n(i, j) l_z(k)}{l_\eta(i, j) + l_\eta(i, j+1)} (\phi(i, j+1, k) - \phi(i, j, k)) + \\
 & + 2 \frac{l_\xi(i, j) l_\eta(i, j)}{l_z(k) + l_z(k+1)} (\phi(i, j, k+1) - \phi(i, j, k)) + \\
 & + 2 \frac{l_\xi(i, j) l_\eta(i, j)}{l_z(k) + l_z(k-1)} (\phi(i, j, k-1) - \phi(i, j, k)) = \\
 & = c(i, j) S_z(i, j) l_z(k)
 \end{aligned}$$

Con le stesse definizioni del *Poisson solver* in due dimensioni riportate nel paragrafo 2.2 e in più:

$$\begin{aligned}
 A_t(k) &= \frac{2}{l_z(k) + l_z(k+1)} & (k = 1, \dots, p-2) \\
 A_b(k) &= \frac{2}{l_z(k) + l_z(k-1)} & (k = 2, \dots, p-1)
 \end{aligned}$$

l'equazione per la generica cella interna si può scrivere:

$$\begin{aligned}
& (A_{s_{i,j-1}} l_{z_k}) \phi(i, j-1, k) + (A_{w_{i-1,j}} l_{z_k}) \phi(i-1, j, k) + \\
& + (A_{p_{i,j}} l_{z_k} - A_{b_k} l_{\xi_{i,j}} l_{\eta_{i,j}} - A_{t_k} l_{\xi_{i,j}} l_{\eta_{i,j}}) \phi(i, j, k) + \\
& + (A_{e_{i+1,j}} l_{z_k}) \phi(i+1, j, k) + (A_{n_{i,j+1}} l_{z_k}) \phi(i, j+1, k) + \quad (A.2) \\
& + (A_{b_k} l_{\xi_{i,j}} l_{\eta_{i,j}}) \phi(i, j, k-1) + (A_{t_k} l_{\xi_{i,j}} l_{\eta_{i,j}}) \phi(i, j, k+1) = \\
& = Q_{i,j,k} l_{z_k}
\end{aligned}$$

dove si è usata una notazione compatta per cui la scrittura $l_{\xi}(i, j)$ equivale alla $l_{\xi_{i,j}}$ eccetera. Si può estendere la validità della A.2 per le celle sul bordo con l'imposizione delle condizioni al contorno.

Condizioni al contorno

La questione delle condizioni al contorno sul piano (ξ, η) è già stata affrontata e l'equazione A.2 sui bordi a ξ e a η costante subisce gli stessi cambiamenti del caso bidimensionale descritti in 2.3. La periodicità in

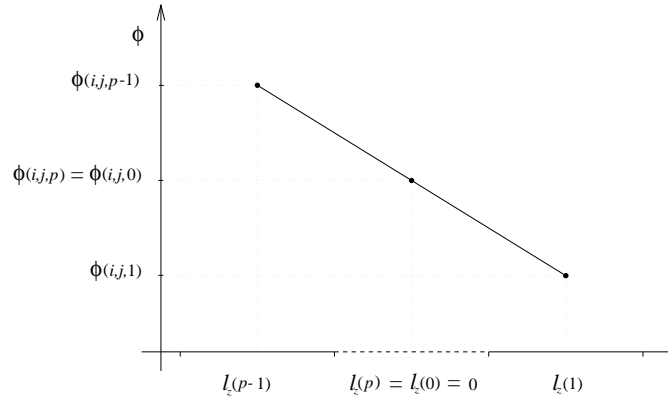


Figura A.1: Condizioni al contorno periodiche lungo z

direzione z si esprime, con riferimento alla figura A.1 in termini finiti:

$$\begin{cases} \phi(i, j, 0) = \phi(i, j, p) \\ \frac{\phi(i, j, 1) - \phi(i, j, 0)}{l_z(1)} = \frac{\phi(i, j, p) - \phi(i, j, p-1)}{l_z(p-1)} \end{cases}$$

con semplici passaggi si possono esprimere le incognite dei volumi fantasma $\phi(i, j, 0)$ e $\phi(i, j, p)$ in funzione delle $\phi(i, j, 1)$ e $\phi(i, j, p-1)$:

$$\phi(i, j, 0) = \frac{l_z(p-1)}{l_z(1) + l_z(p-1)} \phi(i, j, 1) + \frac{l_z(1)}{l_z(1) + l_z(p-1)} \phi(i, j, p-1)$$

cosicch  nelle equazioni A.2 per le celle con $k = 1$, al posto del termine $\phi(i, j, k-1)$, che non compare, appare $\phi(i, j, p-1)$ moltiplicato per un coefficiente $A_b(1) l_{\xi_{i,j}} l_{\eta_{i,j}}$ con:

$$A_b(1) = \frac{2}{l_z(1) + l_z(p-1)}$$

similmente le equazioni per le celle con $k = p-1$ contengono un termine $A_t(p-1) l_{\xi_{i,j}} l_{\eta_{i,j}}$, che moltiplica le incognite $\phi(i, j, 1)$ al posto delle $\phi(i, j, k+1)$:

$$A_t(p-1) = A_b(1) = \frac{2}{l_z(1) + l_z(p-1)}$$

Con queste nuove definizioni, il coefficiente che moltiplica $\phi(i, j, k)$ mantiene la stessa espressione anche sui bordi a z costante.

La tecnica di decomposizione matriciale

Si definiscono le matrici \mathbf{L}_z , $\mathbf{Q}_{i,j}$, $\phi_{i,j}$, e \mathbf{A} ; la matrice diagonale \mathbf{L}_z ha sulla diagonale principale gli spessori, lungo z , dei $(p-1)$ piani di celle;

$$\mathbf{L}_z = \begin{pmatrix} l_{z_1} & & & \\ & l_{z_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & l_{z_{p-1}} \end{pmatrix}$$

I vettori colonna $\mathbf{Q}_{i,j}$ e $\boldsymbol{\phi}_{i,j}$ contengono rispettivamente i valori dei termini noti e della funzione incognita per ciascuna colonna di celle (i, j) :

$$\mathbf{Q}_{i,j} = \begin{pmatrix} Q_{i,j,1} \\ Q_{i,j,2} \\ Q_{i,j,3} \\ \vdots \\ Q_{i,j,p-1} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\phi}_{i,j} = \begin{pmatrix} \phi_{i,j,1} \\ \phi_{i,j,2} \\ \phi_{i,j,3} \\ \vdots \\ \phi_{i,j,p-1} \end{pmatrix}$$

La matrice \mathbf{A} è tridiagonale, ciclica:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{d_1} & A_{t_1} & & & & & A_{b_1} \\ A_{b_2} & A_{d_2} & A_{t_2} & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & A_{b_k} & A_{d_k} & A_{t_k} & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & A_{b_{p-2}} & A_{d_{p-2}} & A_{t_{p-2}} \\ A_{t_{p-1}} & & & & & A_{b_{p-1}} & A_{d_{p-1}} \end{pmatrix}$$

essa contiene i coefficienti A_t e A_b definiti prima, compresi i termini “ciclici” $A_b(1)$ e $A_t(p-1)$ e sulla diagonale principale:

$$A_d(k) = -A_b(k) - A_t(k) \quad (k = 1, \dots, p-1)$$

La matrice \mathbf{A} è simmetrica, come si scopre non appena si osservi che $A_t(k) = A_b(k+1)$.

Con queste nuove definizioni si può scrivere un “vettore” di $(p-1)$ equazioni ognuna delle quali è l’espressione generica di altre $(n-1)(m-1)$ equazioni:

$$\begin{aligned} & A_{s_{i,j-1}} \mathbf{L}_z \phi(i, j-1) + A_{w_{i-1,j}} \mathbf{L}_z \phi(i-1, j) + \\ & + (A_{p_{i,j}} \mathbf{L}_z + l_{\xi_{i,j}} l_{\eta_{i,j}} \mathbf{A}) \phi(i, j) + A_{e_{i+1,j}} \mathbf{L}_z \phi(i+1, j) + \quad (\text{A.3}) \\ & + A_{n_{i,j+1}} \mathbf{L}_z \phi(i, j+1) = \mathbf{L}_z \mathbf{Q}_{i,j} \end{aligned}$$

Poiché \mathbf{A} non è una matrice diagonale, queste equazioni non sono disaccoppiate nel senso che nella k -esima equazione compaiono anche le incognite $\phi(i, j, k-1)$ e $\phi(i, j, k+1)$. Si può diagonalizzare \mathbf{A} o meglio $\mathbf{L}_z^{-1}\mathbf{A}$ per ridurre quel sistema a $(p-1)$ sistemi indipendenti di $(n-1)(m-1)$ equazioni, seguendo l'idea del metodo *matrix decomposition*, applicato in [17] per la scrittura di un *Poisson solver* in coordinate cartesiane.

La diagonalizzazione avviene secondo la matrice \mathbf{U} e cioè i prodotti:

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{L}_z^{-1} \mathbf{A} \mathbf{U}$$

forniscono una matrice diagonale $\mathbf{\Lambda}$. Si moltiplica l'equazione A.3 a sinistra per \mathbf{L}_z^{-1} , poi nuovamente a sinistra per \mathbf{U}^{-1} e si definiscono:

$$\tilde{\phi}(i, j) = \mathbf{U}^{-1} \phi(i, j)$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}(i, j) = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{Q}(i, j)$$

l'equazione A.3 diventa allora:

$$\begin{aligned} & A_{s_{i,j-1}} \mathbf{I} \tilde{\phi}(i, j-1) + A_{w_{i-1,j}} \mathbf{I} \tilde{\phi}(i-1, j) + \\ & + [A_{p_{i,j}} \mathbf{I} + l_{\xi_{i,j}} l_{\eta_{i,j}} \mathbf{\Lambda}] \tilde{\phi}(i, j) + A_{e_{i+1,j}} \mathbf{I} \tilde{\phi}(i+1, j) + \\ & + A_{n_{i,j+1}} \mathbf{I} \tilde{\phi}(i, j+1) = \mathbf{I} \tilde{\mathbf{Q}}_{i,j} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

dove si è indicata con \mathbf{I} la matrice identità.

La nuova equazione A.4, equivalente alla A.2, permette di risolvere l'equazione di Poisson “per piani”, tramite la soluzione di $(p-1)$ sistemi di $(n-1)(m-1)$ equazioni ognuno dei quali indipendente dagli altri. Dal punto di vista computazionale, un impegno molto meno gravoso della soluzione di un sistema di $(n-1)(m-1)(p-1)$ equazioni come quello rappresentato dalla A.3.

La forma della matrice di ciascuno di quei $(p-1)$ sistemi lineari è quella descritta nel paragrafo 2.4 se non fosse che sulla diagonale della k -esima matrice, alla riga $(m-1)(j-1) + i$, relativa alla cella (i, j) , al posto del coefficiente $A_{p_{i,j}}$, si trova $(A_{p_{i,j}} + l_{\xi_{i,j}} l_{\eta_{i,j}} \lambda_k)$ con λ_k autovalore associato al k -esimo piano.

Viste le condizioni al contorno assegnate, la funzione incognita ϕ viene determinata a meno di una costante; questo implica che il sistema

di equazioni rappresentato dalla A.3 ha ∞^1 soluzioni e che uno degli autovalori λ_k è nullo. Il sistema lineare associato a quel piano è rappresentato da una matrice \mathbf{M} singolare identica a quella descritta nel paragrafo 2.4; perciò bisogna fissare il valore di ϕ su un punto di quel piano per rendere il problema determinato.

Si può notare che i coefficienti dei $(p-1)$ sistemi da risolvere, rimangono sempre uguali per una data griglia di calcolo e solo il vettore dei termini noti $\mathbf{Q}_{i,j}$ cambia a ogni passo di tempo. La sequenza di operazioni da effettuare allora si divide in una parte che è sufficiente eseguire una sola volta per una data geometria:

1. Scrivere \mathbf{L}_z e \mathbf{A}
2. invertire \mathbf{L}_z
3. risolvere il problema degli autovalori $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{L}_z^{-1} \mathbf{A} \mathbf{U}$

e una parte che è necessario eseguire a ogni passo di tempo:

- (a) ricavare $\tilde{\mathbf{Q}}(i, j) = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{Q}(i, j)$
- (b) risolvere $(p-1)$ problemi di Poisson in due dimensioni
- (c) trasformare i risultati $\mathbf{U} \tilde{\phi}(i, j) = \phi(i, j)$

Il fatto che il solo vettore dei termini noti si modifichi a ogni *timestep*, oltre a consentire di effettuare la diagonalizzazione una volta per tutte, suggerisce contemporaneamente di cercare un metodo di soluzione che dopo una prefattorizzazione iniziale esegua a ogni passo di tempo le operazioni più rapide di sostituzione; il metodo di soluzione adottato per i $(p-1)$ sistemi di equazioni è descritto in appendice B.

Appendice B

La tecnica BGE per la soluzione di sistemi lineari

Il metodo *projection* presentato nel capitolo 3 richiede la soluzione di una equazione di Poisson per passo di tempo; poiché si tratta di una fase del calcolo molto onerosa dal punto di vista computazionale, l'efficienza del *Poisson solver* è stata curata in modo particolare. In questa appendice presento il metodo per la soluzione dei sistemi di equazioni lineari rappresentati dalla A.4.

Nella scelta del metodo di soluzione si è tenuto conto del fatto che le matrici da risolvere sono tridiagonali a blocchi, simmetriche (tutte meno quella associata al piano “singolare”), a dominanza diagonale, che un metodo di soluzione diretto, oltre alla possibilità di distinguere la fase di prefattorizzazione da quella di soluzione, ha anche il pregio di sfruttare meglio l'architettura parallela dei calcolatori moderni.

Descrizione dell'algoritmo BGE

La tecnica *Block Gaussian Elimination*, che si trova descritta in [18], è un'estensione della procedura di eliminazione gaussiana a matrici a blocchi, i cui elementi siano cioè ancora delle matrici.

Supponiamo di dover risolvere il problema di Poisson relativo a uno dei piani associati a un autovalore non nullo, su una griglia di $n \times m$ volumi di controllo. La matrice \mathbf{M} è allora tridiagonale a blocchi formata da $m \times m$ blocchi di dimensione $n \times n$, è simmetrica, a dominanza diagonale e non singolare.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} D_1 & S_1 & & & & & & & & \\ S_1 & D_2 & S_2 & & & & & & & \\ & S_2 & D_3 & S_3 & & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & & S_{j-1} & D_j & S_j & & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & & S_{m-3} & D_{m-2} & S_{m-2} & & \\ & & & & & & S_{m-2} & D_{m-1} & S_{m-1} & \\ & & & & & & & S_{m-1} & D_m & \end{pmatrix}$$

Poiché \mathbf{M} è a dominanza diagonale, il procedimento di eliminazione di Gauss può essere portato a termine senza permutare l'ordine iniziale delle equazioni ovvero senza bisogno dell'operazione di *pivoting*.

L'approccio BGE si compone di due fasi di calcolo distinte; nella fase della *prefattorizzazione* si formano una serie di m matrici $\mathbf{C}_j \in \mathcal{M}_{n \times n}$ secondo l'algoritmo:

```

 $\mathbf{C}_1 \leftarrow \mathbf{D}_1^{-1}$ 
do j=2, ..., m
     $\mathbf{T} \leftarrow (\mathbf{D}_j - \mathbf{S}_{j-1} \mathbf{C}_{j-1} \mathbf{S}_{j-1})$ 
     $\mathbf{C}_j \leftarrow \mathbf{T}^{-1}$ 
end do

```

in questo modo si memorizza nelle \mathbf{C}_j l'inverso delle matrici \mathbf{D}_j sulla diagonale principale della \mathbf{M} , trasformata in triangolare superiore secondo Gauss, senza *pivoting*. Le matrici \mathbf{S}_j delle diagonali secondarie invece rimangono inalterate.

Si noti che per il funzionamento di questo algoritmo, è necessaria la non singolarità della matrice \mathbf{C}_1 e delle \mathbf{T} ; si può dimostrare che ciò è sempre verificato quando, come accade nel nostro caso, le matrici \mathbf{D}_j sono a dominanza diagonale e le \mathbf{S}_j sono diagonali.

La seconda fase consiste nell'effettiva soluzione del problema e deve essere eseguita per ogni diverso vettore di termini noti. Il vettore colonna \mathbf{Q}_j contiene i termini noti per la j -esima riga di sottomatrici, cioè per le righe dalla $n(j-1) + 1$ alla nj , e \mathbf{U} è un vettore colonna temporaneo di dimensione n .

```

 $\mathbf{U} \leftarrow \mathbf{Q}_1$ 
 $\mathbf{Q}_1 \leftarrow \mathbf{C}_1 \mathbf{U}$ 
do j=2, ..., m
     $\mathbf{U} \leftarrow (\mathbf{Q}_j - \mathbf{S}_{j-1} \mathbf{Q}_{j-1})$ 
     $\mathbf{Q}_j \leftarrow \mathbf{C}_j \mathbf{U}$ 
end do

```

Alla fine del ciclo di *block elimination* nei vettori \mathbf{Q}_j si trovano i termini noti trasformati alla Gauss moltiplicati per l'inverso della diagonale trasformata. La fase di soluzione prosegue con la *back substitution*:

```

do j=m, ..., 2
     $\mathbf{Q}_{j-1} \leftarrow (\mathbf{Q}_{j-1} - \mathbf{C}_{j-1} \mathbf{S}_{j-1} \mathbf{Q}_j)$ 
end do

```

la soluzione del problema si trova, alla fine del procedimento, memorizzata nel vettore \mathbf{Q} che originariamente conteneva i termini noti.

Valutazione delle risorse impiegate

La fase di prefattorizzazione è piuttosto dispendiosa in termini di utilizzo della CPU: essa richiede approssimativamente $n^3m/2 + 2n^2m - n^3/2$ operazioni in virgola mobile mentre la fase di soluzione ne richiede so-

lamente $2n^2m + 2nm - n^2$: perciò questo metodo viene usato di preferenza per risolvere più volte la stessa matrice con diversi termini noti.

Se da un lato la fase di soluzione del metodo BGE è piuttosto veloce, dall'altro occorre molta memoria per immagazzinare le matrici \mathbf{C}_j : m matrici di $n \times n$ elementi occupano n^2m word. Ad esempio, per risolvere il problema di Poisson sulla griglia di $(241 \times 74 \times 16)$ nodi utilizzata per il caso B del canale con le *riblet*, le sole matrici \mathbf{C}_j occupano 60 Mword equivalenti, per il Cray J/916 che utilizza “parole” da 64 bit, a 480 Mbyte.

Appendice C

Cenni di calcolo vettoriale

Per sviluppare il codice descritto in questa tesi e condurre le simulazioni con minor richiesta di risorse è stata utilizzata una *workstation* HP-UX 9000/779 presso l'aula Sun dell'Università di Trieste; per portare a termine le simulazioni che richiedono grossa disponibilità di memoria e lunghi tempi di calcolo (in particolare il canale con le scanalature) il codice è stato portato sul Cray J/916 del Centro di Calcolo dell'Università di Trieste.

Il Cray J ha una architettura vettoriale e parallela e i codici di programmazione devono essere adattati per sfruttare in modo efficiente quel particolare hardware. Occorre ottimizzare il codice per quanto riguarda il tempo di esecuzione delle operazioni: a questa attività sono legati i concetti di elaborazione scalare e vettoriale. Elaborazione scalare (*scalar processing*) è l'esecuzione di operazioni logiche, aritmetiche o di scambio di dati con la memoria quando avvengono una alla volta; quando tali operazioni vengono eseguite non su singoli dati ma su vettori, e perciò vengono usati registri hardware vettoriali, l'elaborazione è vettoriale.

L'elaborazione vettoriale (*vector processing*) è quasi sempre molto più veloce di quella scalare perché una stessa istruzione può operare su una serie di operandi in un registro vettoriale.

Le strutture di programma che tipicamente si adattano alla vetto-

rizzazione sono i cicli o *loop* ma non in tutti i casi essi possono essere ottimizzati automaticamente dal compilatore; le limitazioni più importanti riguardano le chiamate a *subroutine* al loro interno e i casi di dipendenza in cui il completamento di un passo di ciclo richiede i risultati dell'elaborazione di un altro passo dello stesso ciclo.

La tecnica utilizzata per permettere ai cicli che contengono chiamate a semplici *subroutine* di essere vettorizzati si chiama *inlining* e consiste nello sviluppare all'interno dei cicli le operazioni che erano state assegnate alle *subroutine*.

D'altra parte occorre ottimizzare il codice per quel che riguarda l'impiego della memoria. Un codice si dice *memory bound* [19] quando spende troppo tempo nel *memory management* e cioè nelle chiamate al sistema operativo che modificano la memoria utilizzata.

Nel caso particolare del linguaggio di programmazione *Fortran 90* utilizzato nella scrittura del codice di calcolo, le allocazioni dinamiche di variabili eseguite dal comando `ALLOCATE` non generano una chiamata al sistema operativo ma sono gestite direttamente dal compilatore; di fatto sono però operazioni di *memory management* e in quanto tali richiedono tempi di esecuzione notevoli. Per questa ragione si sono eliminate tutte le allocazioni dinamiche di variabili e le chiamate a subroutine esterne dal ciclo che viene eseguito a ogni passo di tempo.

Un altro motivo per cui, per motivi strettamente legati alla memoria impiegata, un codice può avere lunghi tempi di esecuzione sono le attese in coda agli altri processi dovute alla bassa priorità assegnata ai processi con elevata richiesta di memoria.

Conclusioni

Si è affrontato il problema della scrittura di un programma di simulazione numerica diretta di correnti turbolente, secondo un metodo di soluzione *projection* semi-implicito, per griglie curvilinee ortogonali in un piano e cartesiane nella direzione perpendicolare.

Inizialmente, con l'intento di provare l'accuratezza del codice, si sono condotte delle simulazioni in un canale tra lastre piane parallele. I risultati ottenuti, in ottimo accordo con quelli di un *database* del Norwegian Institute of Technology e con la legge logaritmica di parete, indicano che il programma è accurato nella simulazione di flussi turbolenti, per il caso particolare di griglie cartesiane nelle tre direzioni.

Successivamente si è simulato il moto su canali di due diverse geometrie, cercando di replicare il lavoro descritto da Choi, Moin e Kim in [9]; nella prima delle due geometrie la resistenza sulla parete scanalata è superiore a quella di una lastra piana, mentre le *riblet* dell'altra sono capaci di diminuirla.

Anche in questo caso il programma si è rivelato stabile e accurato: non solo i profili delle più importanti grandezze statistiche ma anche i valori di resistenza, nei limiti imposti da un tempo di raccolta dei dati troppo breve, riproducono molto bene i risultati ottenuti da Choi, Moin e Kim in geometrie identiche e condizioni di moto molto simili. In particolare, si sono misurati dei valori del rapporto tra la resistenza della parete con le *riblet* e la resistenza della parete piana D_r/D_f di 1.09 e di 0.98, rispettivamente nei canali con *riblet* di spessore $s^+ = 45$ e $s^+ = 23$.

Si può concludere che l'obiettivo principale, vale a dire la simulazione di flussi turbolenti geometrie moderatamente complesse è stato senz'altro raggiunto.

D'altra parte ci sono alcuni aspetti del programma che sono migliorabili. Si potrebbero ottenere tempi di esecuzione più brevi cercando, oltre a sfruttare più a fondo l'architettura vettoriale e parallela del Cray J/916, di diminuire la richiesta di memoria. Come si sottolinea in appendice B, il metodo diretto di soluzione dei sistemi lineari impiegato nel *Poisson solver* ha il pregio della rapidità ma richiede parecchia memoria, almeno relativamente a quella, limitata, disponibile sul Cray e la rapidità del calcolo viene del tutto annullata dai lunghi tempi di attesa in coda ad altri processi, per la bassa priorità associata ai *job* di grosse dimensioni.

L'adozione, al posto del *Block Gaussian Elimination*, di un metodo di soluzione di tipo iterativo potrebbe consentire, con la diminuzione dell'attesa per la disponibilità della memoria, di concludere le simulazioni in tempi più brevi.

Scritto per griglie curvilinee ortogonali, il programma è stabile e accurato anche su griglie che si discostano da quell'ipotesi. Solo in corrispondenza di celle visibilmente non ortogonali (con vertici che formano angoli di trenta gradi o più piccoli) vengono calcolati picchi di pressione e di velocità che non trovano una giustificazione fisica.

Per effettuare simulazioni su geometrie più accidentate di quelle su cui si è lavorato finora si potrà tener conto, con una semplice modifica, dei termini "non ortogonali". In particolare l'estensione a griglie curvilinee generiche deve avvenire nel calcolo delle velocità provvisorie del metodo *projection* ma non è necessario, come si afferma anche in [20], modificare nello stesso modo il *Poisson solver* che ha il solo compito di calcolare un campo di pressione che a sua volta assicuri il rispetto della continuità del campo di velocità.

Un altro importante progetto per il futuro sviluppo del programma consiste nell'introduzione dell'equazione dell'energia per investigare sulle proprietà di scambio termico delle superfici con le *riblet*; ciò avverrà nell'ambito di un progetto nazionale di ricerca coordinato dall'ENEA nel settore dello scambio termico ad alte prestazioni.

Pochi studi sono stati condotti sull'argomento e i risultati sono ancora incerti ma sembra che le *riblet* abbiano un coefficiente di scambio termico più elevato di quello di una lastra piana; se queste proprietà fossero confermate un migliore scambio termico potrebbe essere ottenuto con le

riblet senza incorrere nell'incremento della resistenza che normalmente è associato all'adozione di superfici di contatto tra fluido e pareti non piane.

Bibliografia

- [1] J. F. Thompson, Z. U. A. Warsi, C. W. Mastin, *Numerical Grid Generation*. Amsterdam: North-Holland, 1985.
- [2] Z. U. A. Warsi, “Numerical generation of orthogonal and non-orthogonal coordinates in two dimensional simply and doubly connected regions,” Tech. Rep. 151, Von Karman Institute for Fluid Dynamics, Rhode Saint Genèse, Belgium, 1984.
- [3] J. H. Ferziger, M. Perić, *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Berlin: Springer-Verlag, 1996.
- [4] S. Kacac, R. K. Shah, W. Aung, *Handbook of single-phase convective heat transfer*. New York: John Wiley & Sons, 1987.
- [5] P. M. Gresho, “On the theory of semi-implicit projection methods for viscous incompressible flow and its implementation via a finite element method that also introduces a nearly consistent mass matrix. part 1: theory,” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 11, pp. 587–620, 1990.
- [6] M. Piller, *Simulazione diretta e large eddy di flussi turbolenti isocorici*. Tesi di laurea, Università degli studi di Trieste, 1997.
- [7] S. Sebben, B. R. Baliga, “Some extensions of tridiagonal and pentadiagonal matrix algorithms,” *Numerical Heat Transfer*, vol. 28, pp. 323–351, 1995.
- [8] R. Kristoffersen, H. Andersson, “Direct numerical simulation data base of turbulent transport phenomena,” The Norwegian Institute of Technology, Trondheim, Norway, 1993. ftp.thtlab.t.u-tokyo.ac.jp.

- [9] H. Choi, P. Moin, J. Kim, "Direct numerical simulation of turbulent flow over riblets," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 225, pp. 503–539, 1993.
- [10] A. Baron, M. Quadrio, L. Vigevano, "Riduzione della resistenza di attrito in correnti turbolente e altezza di protrusione di pareti scanalate," *Aerotecnica missili e spazio*, pp. 129–136, settembre-dicembre 1989.
- [11] D. C. Chu, G. E. Karniadakis, "A direct numerical simulation of laminar and turbulent flow over riblet-mounted surfaces," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 250, pp. 1–42, Cambridge University Press, 1993.
- [12] E. Coustols, "Main features of turbulent drag reduction via micro-grooved surfaces: riblets," in *Computational Fluid Dynamics '98*, pp. 594–603, John Wiley & Sons, 1998.
- [13] K. S. Choi, D. M. Orchard, "Turbulence management using riblets for heat and momentum transfer," *Experimental Thermal and Fluid Science*, vol. 15, pp. 109–124, New York: Elsevier Science Inc., 1997.
- [14] D. Goldstein, R. Handler, L. Sirovich, "Direct numerical simulation of turbulent flow over a modelled riblet covered surface," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 302, pp. 333–376, 1995.
- [15] A. E. Alving, P. Freeberg, "Effect of riblets on sails," *Experiments in fluids*, vol. 19, no. 6, pp. 397–404, 1995.
- [16] S. Nakao, "Application of V shaped riblets to pipe flow," *Journal of Fluids Engineering, Transaction of the ASME*, vol. 113, no. 4, pp. 587–590, 1991.
- [17] L. Onesti, *Il calcolo parallelo ad alte prestazioni: applicazioni di termofluidodinamica computazionale sul Cray-T3D*. Tesi di laurea, Università degli studi di Trieste, 1994.
- [18] W. J. Minkowycz, E. M. Sparrow, G. E. Schneider, R. H. Pletcher, *Handbook of numerical heat transfer*. New York: John Wiley & Sons, 1988.

- [19] Cray Research Inc., *Optimizing Code on Cray PVP Systems*, 1995.
- [20] X. Wu, K. D. Squires, Q. Wang, “Extension of the fractional step method to general curvilinear coordinate systems,” *Numerical Heat Transfer*, vol. 27, pp. 175–194, 1995.