Esempi

$\mathbb{C}$ campo dei numeri complessi

$\shortparallel$

$\{z=a+ib \mid a,b\in\mathbb{R},\ i^2=-1\}$

$|z|$ modulo di z è $\sqrt{a^2+b^2}=\rho\in\mathbb{R}$, $\rho\geq 0$

$|z|=0 \iff z=0$

$\bar{z}=a-ib$ coniugato

$|z|=z\cdot\bar{z}$ allora $\boxed{\frac{z\bar{z}}{|z|}}=1$ se $z\neq 0$

e quindi $z^{-1}=\frac{\bar{z}}{|z|}$: <u>$\mathbb{C}$ è un campo</u>

1) $\mathbb{C}$ è un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale

2) $\mathbb{C}$ è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, con base

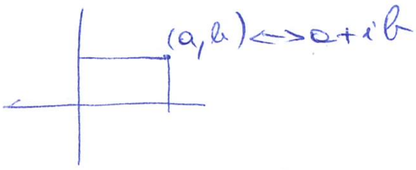
$1,\ i$: $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}=2$.

Allora $\mathbb{C}\simeq\mathbb{R}^2$ <u>isomorfismo</u>

$$\begin{array}{cc} 1 & e_1 \\ i & e_2 \end{array}$$

$a+bi \longrightarrow ae_1+be_2=(a,b)$

Rappresentazione di $\mathbb{C}$ nel piano di Argand-Gauss.



3) endomorfismi di $\mathbb{C}$ possono essere $\mathbb{C}$-endomorfismi o $\mathbb{R}$-endomorfismi.

$\mathbb{C}$- endom. :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\cdot z} & \mathbb{C} \\ 1 & \longrightarrow & z \\ x & \longrightarrow & zx \end{array}$$

è di questo tipo e dunque

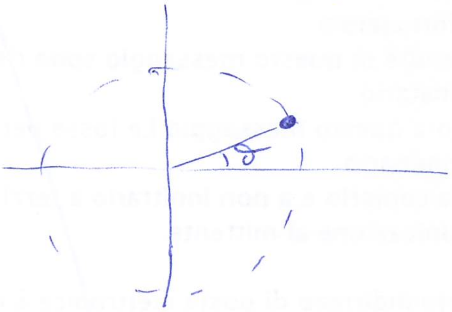
: è la moltiplicaz. per z.

Notaz. trigonometrica: $z = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$;

$\rho = |z|$ è il modulo, $\frac{z}{\rho}$ ha modulo 1 dunque $\frac{z}{\rho}$ ha $a^2 + b^2 = 1$, quindi si può scrivere $a = \cos\vartheta$
$b = \sin\vartheta$,

con ϑ def. a meno di $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Supp. $|z| = 1$: z è sulla crf unitaria
$z = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$



$$\cdot z : a + ib \longrightarrow (\cos\vartheta + i\sin\vartheta)(a + ib) =$$
$$= (a\cos\vartheta - b\sin\vartheta) + i(a\sin\vartheta + b\cos\vartheta)$$

Lo riscrivo identificando $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$

$$\cdot z : \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a\cos\vartheta - b\sin\vartheta \\ a\sin\vartheta + b\cos\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

dunque $\cdot z = L(A)$, dove $A = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$.

È $\mathbb{R}$-lineare.

Se $a + ib = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \rho\cos\alpha + i\rho\sin\alpha$,

$$L(A)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\alpha\cos\vartheta - \rho\sin\alpha\sin\vartheta \\ \rho\cos\alpha\sin\vartheta + \rho\sin\alpha\cos\vartheta \end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\vartheta) \\ \sin(\alpha+\vartheta) \end{pmatrix}$$

$$\|$$

$$L(A)\begin{pmatrix} \rho\cos\alpha \\ \rho\sin\alpha \end{pmatrix}$$

$L(A)$ è la rotazione di angolo ϑ.

Spazio vettoriale duale.

Dato V, spazio vettoriale di dim. n, e fissata una sua base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$, consideriamo

$V^* = \mathrm{Hom}(V, K) = \{ f : V \to K \mid f \text{ lineare} \}$.

I suoi elementi sono detti forme lineari su V o funzionali lineari su V.

Def. $v_i^* : V \to K$, per ogni $i = 1, \dots, n$, lineare, ponendo $v_i^*(v_1) = 0$, $v_i^*(v_2) = 0, \dots, v_i^*(v_i) = 1, \dots$

cioè $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$ simbolo di Kronecker

$$= \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Per il teor. di determinazione di un'appl. lineare, $\exists !$ appl. lineare v_i^* che opera in questo modo.

Dunque se $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$, $v_i^*(v) = x_i$, i-esima coordinata di v rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Le forme lineari $v_1^*, \dots, v_n^*$ sono dette funzioni coordinate rispetto a $\mathcal{B}$.

Prop. $v_1^*, \dots, v_n^*$ formano una base di V^*, detta base duale di $\mathcal{B}$.

Dim: 1) linearmente indipendenti:

Sia $\lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^* = 0$: significa che $\forall v \in V$

$(\lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^*)(v) = 0$.

Ma v si può scrivere in modo unico $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$, e $(\lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^*)(v) = 0$

$\iff (\lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^*)(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) =$

$= \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$.

Dunque per ogni scelta di $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ si ha $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$. In particolare se $(x_1, \dots, x_n) = (1, 0, \dots, 0)$ si ottiene $\lambda_1 = 0, \dots$

se $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0, \overset{j}{\overset{\downarrow}{1}}, \dots, 0)$ si ottiene $\lambda_j = 0$.

Perciò $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

2) generano V^*.

Sia $f : V \longrightarrow K$ lineare. Cerchiamo coefficienti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tali che $f = \lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^*$.

Se vogliamo che questa uguaglianza valga, le due applicazioni devono coincidere sui vettori di $\mathcal{B}$, cioè dev'essere $f(v_1) = (\lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^*)(v_1) = \lambda_1$,

$\vdots$

$f(v_n) = (\lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^*)(v_n) = \lambda_n$.

Quindi si ha $f = f(v_1) v_1^* + \dots + f(v_n) v_n^*$ perché assumono lo stesso valore sui vettori di $\mathcal{B}$. ■

Oss.: si ha anche $v = v_1^*(v) v_1 + \dots + v_n^*(v) v_n$ $\forall v \in V$.

* * *

Matrice di un'applicazione lineare rispetto a basi fissate.

Sia $f: \underset{n}{V} \longrightarrow \underset{m}{W}$ lineare

Fissiamo basi $B = (v_1, \dots, v_n)$ di V,
$B' = (w_1, \dots, w_m)$ di W.

Allora $\forall j = 1, \dots, n$, $f(v_j)$ si scrive in maniera unica come combinazione lineare di $w_1, \dots, w_m$, della forma: $f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$.

Def. matrice di f rispetto alle basi B, B' è:

$$\underset{m \times n}{M^{B}_{B'}(f)} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} f(v_1) & f(v_2) & & f(v_n) \end{array} \end{array}.$$

Allora se $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \in V$,

$f(v) = x_1 f(v_1) + \dots + x_n f(v_n) =$ perché f è lineare

$= x_1(a_{11} w_1 + \dots + a_{m1} w_m) + \dots + x_n(a_{1n} w_1 + \dots + a_{mn} w_m) =$

$= (a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n) w_1 + \dots + (a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n) w_m.$

Perciò $f(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = y_1 w_1 + \dots + y_m w_m$, con

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

sono le coordinate di $f(v)$ rispetto a B'.

Si ha $Y = AX$, dove $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

$A = M^{B}_{B'}(f)$.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Si può scrivere un diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "K_B"'] & W \arrow[d, "K_{B'}"] \\ K^n \arrow[r, "L(A)"'] & K^m \end{tikzcd} \quad \text{dove} \quad \begin{tikzcd} v \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k_B"] & f(v) \arrow[d, "k_{B'}"] \\ (x_1, \dots, x_n) \arrow[r, "L(A)"] & (y_1 \dots y_m) \end{tikzcd}$$

LIVELLO ASTRATTO

LIVELLO COMPUTAZIONALE

"commutativo" significa che $K_{B'} \circ f = L(A) \circ K_B$.

Teorema (forma canonica)

$f : \underset{n}{V} \longrightarrow \underset{m}{W}$ lineare.

Esistono basi B di V e B' di W tali che

$$M^{B}_{B'}(f) = \begin{array}{r} \\ m-r\{ \end{array}\left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & \underbrace{0}_{n-r} \end{array}\right) \quad \text{dove } r = \underset{\substack{\| \\ \dim \mathrm{Im} f}}{\mathrm{rg}(f)};$$

matrice a blocchi: E_r è la matrice identica di ordine r, e gli altri blocchi $r\times(n-r)$, $(m-r)\times r$, $(m-r)\times(n-r)$ sono nulli.

Dim.

Il fatto che la matrice di f rispetto a basi $B=(v_1,\dots,v_n)$ e $B'=(w_1,\dots,w_m)$ ha quella forma significa che

$$f(v_1)=w_1=1\cdot w_1+0\cdot w_2+\dots+0\cdot w_m$$
$$\vdots$$
$$f(v_r)=w_r=0\cdot w_1+\dots+1\cdot w_r+\dots 0\, w_m$$
$$f(v_{r+1})=0$$
$$\vdots$$
$$f(v_n)=0.$$

perciò $v_{r+1},\dots,v_n$ appartengono al nucleo di f.

Siccome $r=rg(f)$, $n=\dim V$ = dominio di f, il nucleo di f ha dim $n-r$ (teor. della dimensione): $v_{r+1},\dots,v_n$ sono $n-r$ elementi linearmente indip. perché parte di una base di Ker f, quindi ne formano una base.

Allora per costruire le basi richieste di V e W parto da una base di Ker f: $v_{r+1},\dots,v_n$; la completo a una base B di V: $v_1,\dots,v_r,\dots,v_n$.

Allora $f(v_1),\dots,f(v_r)$ sono r vettori che generano Im f, che ha dim r: quindi formano una sua base $w_1,\dots,w_r$ e sono perciò linearmente indipendenti. Li completo

a una base di W: $B' = (w_1 \dots w_2, \dots w_m)$.
Rispetto a tali basi la matrice è quella voluta. ∎

Osserviamo che le basi B, B' dipendono da alcune scelte, non sono uniche.

Oss. $L(A): K^n \longrightarrow K^m$ ha A come matrice associata rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio. Se si cambiano basi, cambia la matrice.

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad L(A): \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$B = (v_1, v_2) := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$B' = (w_1, w_2) := \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

$$L(A)(v_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad L(A)(v_2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Perciò $M^{B}_{B'}(L(A)) = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 2 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$.

Esempio con spazi vettoriali di polinomi.

$V = \mathbb{R}[t]_2$ con base $(1, t, t^2) = \mathcal{B}$

$W = \mathbb{R}[t]_3$ " " $(1, t, t^2, t^3) = \mathcal{B}'$.

Def. $f : V \longrightarrow W$ ponendo

$f(p(t)) = t^2 p'(t+1)$.

f è lineare per le proprietà della derivata, oppure scrivendo f esplicitamente:

se $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$,

$p'(t) = a_1 + 2a_2 t$

$p'(t+1) = a_1 + 2a_2(t+1) = (a_1 + 2a_2) + 2a_2 t$

$t^2 p'(t+1) = (a_1 + 2a_2)t^2 + 2a_2 t^3$.

Calcolo $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$:

$f(1) = 0$, $f(t) = t^2$, $f(t^2) = 2t^2 + 2t^3$

allora $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Si ha: $\underset{4\times3}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}} \underset{3\times1}{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 + 2a_2 \\ 2a_2 \end{pmatrix}$ sono le coordinate di $f(p)$.

Def. rango di un'appl. lineare è la dim dell'immagine.

Teorema $\underset{n}{f: V} \longrightarrow \underset{m}{W}$ lineare, B, B' siano basi di V e W.
Sia $A = M^{B}_{B'}(f)$. Allora $rg(f) = rg\,L(A) = rg(A)$.

Dim.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "K_B"'] & W \arrow[d, "K_{B'}"] \\ K^n \arrow[r, "L(A)"] & K^m \end{tikzcd}$$

$\operatorname{Im} L(A) = \{y \in K^m \mid y = L(A)(x),\ x \in K^n\} =$ K_B è isomorf.

$= \{y \in K^m \mid y = L(A)(K_B(v)),\ v \in V\} =$

$= \operatorname{Im}(L(A) \circ K_B) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{diagr.} \\ \text{commut.}}}{=} \operatorname{Im}(K_{B'} \circ f) =$

$= \{y \in K^m \mid y = K_{B'}(f(v)),\ v \in V\}$

$= K_{B'}(f(V))$.

Ma $K_{B'}$ è un isomorfismo, dunque

$\operatorname{Im} L(A) \simeq \operatorname{Im} f$ e perciò $\underset{\substack{\| \\ rg(A)}}{rg\,L(A)} = rg(f)$.

Conseguenza importante

Matrici che rappresentano la stessa applicaz. lineare rispetto a basi diverse hanno lo stesso rango (per colonne).

Teorema   Siano fissate:

$\mathcal{B}$ base di V : $v_1, -, v_n$

$\mathcal{B}'$ base di W : $w_1, -, w_m$

L'applicazione

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} : \mathrm{Hom}(V,W) \longrightarrow M(m \times n, K)$$
$$f \longrightarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$$

è un isomorfismo di K-spazi vettoriali.

Dim.

1) ~~f~~ $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$ è lineare, ossia

$$\left.\begin{aligned} M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f+g) &= M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) + M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(g) \\ M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\lambda f) &= \lambda M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) \end{aligned}\right\} \text{ facile}$$

2) E' iniettiva: essendo lineare, basta verificare che ha nucleo nullo.

Sia $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) = 0$, allora $f(v_1)=0, -; f(v_n) = 0$

e dque $f = 0$ per il teor. di det. di un'appl. lineare.

3) E' suriettivo: sia data una matrice M; costruisco f lineare t.c. $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) = M$.

Basta associare a v_i il vettore che ha la colonna m^i come coordinate ~~da~~ rispetto a B', ti, e ~~[illegible]~~ poi si usa il teor. di det. di un'appl. lineare.

Corollario

$\dim \mathrm{Hom}(V, W) = \dim M(m \times n, K) = mn =$
$= \dim V \cdot \dim W$.

In particolare $\dim V^* = \dim V$, (si ritrova quanto già visto) e dunque se $\dim V = n$ finita, si ha $V \simeq V^*$.

— . —

Matrice dell'applicazione lineare composta.

$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} U \qquad \text{lineari}$$

$m \qquad n \qquad p$

$B \qquad B' \qquad B'' \qquad$ basi

$v_1 \dots v_m \qquad v_1' \dots v_n' \qquad v_1'' \dots v_p''$

Allora $\boxed{M^{B}_{B''}(g \circ f) = M^{B'}_{B''}(g)\, M^{B}_{B'}(f)}$

prodotto righe per colonne

$p \times m \qquad p \times n \qquad n \times m$

Sia $A = M^{B}_{B'}(f)$, $B = M^{B'}_{B''}(g)$. Allora

$$f(v_k) = a_{1k} v_1' + \dots + a_{mk} v_m' = \sum_{j=1}^{m} a_{jk} v_j'$$

$$g(v'_j) = b_{1j} \cdot v''_1 + \dots + b_{pj} \cdot v''_p = \sum_{i=1}^{p} b_{ij} v''_i$$

Allora $g(f(v_k)) = g\left(\sum_{j=1}^{m} a_{jk} v'_j\right)$ = linearità

$= \sum_{j=1}^{m} a_{jk}\, g(v'_j) = \sum_{j=1}^{m} a_{jk} \sum_{i=1}^{p} b_{ij} \cdot v''_i$ = prop. distrib.

$= \sum_{i=1}^{p} \Big(\underbrace{\sum_{j=1}^{m} b_{ij} \cdot a_{jk}}_{\text{elem. di } BA \text{ di posto } ik} \Big) v''_i .$ ■

Caso particolare

Se $f: V \longrightarrow V$ è un endomorfismo, cioè $V=W$, si può prendere la stessa base $\mathcal{B}$ per il dominio e il codominio, e si scrive $M_{\mathcal{B}}(f)$ anziché $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$.

L'isomorfismo $M_{\mathcal{B}}: Hom(V,V) \longrightarrow M(n \times n, K)$ ha allora la proprietà $M_{\mathcal{B}}(g \circ f) = M_{\mathcal{B}}(g) M_{\mathcal{B}}(f)$.

Entrambi gli spazi vettoriali hanno anche un'operazione interna di prodotto:

- in $Hom(V,V)$, composizione
- in $M(n \times n, K)$, prodotto righe per colonne

Valgono: proprietà associativa, esistenza dell'elemento neutro, prop. distributiva: si dice che hanno struttura di K-algebra.

Allora M_B è un isomorfismo di K-algebre, perché oltre alla somma e al prodotto esterno conserva anche il prodotto interno.

— · —

Dette $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ le basi canoniche di K^n e K^m, si può considerare l'isomorfismo

$$\begin{array}{lcll} M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}: Hom(K^n, K^m) & \xrightarrow{\sim} & M(m \times n, K) & \\ f & \longrightarrow & M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) & \\ L(A) & \longrightarrow & A & \text{(già osservato)}. \end{array}$$

Allora l'isomorfismo inverso è $L: A \to L(A)$.

Dunque ogni appl. lineare $K^n \to K^m$ è del tipo $L(A)$ per un'unica matrice A.

Nel caso $m = n$, si ha:

$$\begin{array}{lll} f \longrightarrow A = M_{\mathcal{B}}(f) & \text{dunque} & f = L(A) \\ g \longrightarrow B = M_{\mathcal{B}}(g) & \text{"} & g = L(B) \\ g \circ f \longrightarrow M_{\mathcal{B}}(g \circ f) = M_{\mathcal{B}}(g) M_{\mathcal{B}}(f) = BA. & & \end{array}$$

Perciò applicando l'inversa si ha $L(BA) = L(B) \circ L(A)$.