ESERCIZI DI GEOMETRIA 1, FOGLIO 6

Trieste, 18 novembre 2019

1. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3 nell'indeterminata x, e $\mathcal{B}$ la sua base $(1, x, x^2, x^3)$.

(1) Sia $T : V \to V$ l'applicazione definita da $T(p(x)) = p'(x)(x-1)$, dove p' denota la derivata di p. Verificare che T è lineare e scrivere la sua matrice rispetto alla base $\mathcal{B}$ nel dominio e nel codominio;
(2) descrivere $\mathrm{Ker}(T)$, $\mathrm{Im}(T)$ e calcolare le loro dimensioni;
(3) verificare che $V = Ker(T) \oplus Im(T)$.

2. Denotiamo con E_{ij} una matrice avente tutti gli elementi nulli, tranne quello di posto i, j uguale a 1. Denotiamo poi con $E_{\lambda,i}$ una matrice quadrata diagonale avente sulla diagonale principale gli elementi $1, \ldots, 1, \lambda, 1, \ldots, 1$, con λ al posto d'indice i.

Sia A una matrice $m \times n$ a coefficienti in K.
(i) Calcolare il prodotto righe per colonne $E_{ij}A$ dove E_{ij} è di ordine $m \times m$;
(ii) analogamente calcolare $E_{\lambda,i}A$;
(iii) dedurre che le matrici ottenute da A con una trasformazione elementare del I o del II tipo si possono esprimere nella forma MA, con M matrice opportuna.

3. Sia $f = L(A) : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla seguente matrice A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

(1) Determinare il rango di f e la dimensione del nucleo di f;
(2) trovare una base per il nucleo e una base per l'immagine di f;
(3) stabilire per quali valori reali di h il vettore $(-2, h, h^2) \in Im(f)$.

4. (i) Sia $V = K[t]$ il K-spazio vettoriale dei polinomi nell'indeterminata t a coefficienti nel campo K. Sia $\mathcal{B}$ la sua base (infinita) formata dai polinomi $v_i := t^i$, $i \in \mathbb{N}$. Siano v_i^* le forme lineari su V definite da $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$ (simbolo di Kronecker). Dimostrare che tali forme lineari non generano lo spazio vettoriale duale V^*.

(ii) Sia ora $\{v_i\}_{i \in I}$ una base di uno spazio vettoriale V, con I un insieme d'indici arbitrario, e siano $v_i^* \in V^*$ le forme lineari definite come sopra. Dimostrare che i $v_i^*, i \in I$, sono linearmente indipendenti, ma che generano V^* se e solo se V ha dimensione finita.