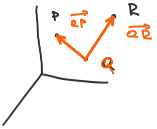
Lezione 18 novembre

lunedì 18 novembre 2019 11:19

Piano affine per 3 punti NON ALLINEATI
cioè non contenuti in 1 retta:



Siano $P=(p_1,p_2,p_3)$, $Q=(q_1,q_2,q_3)$

$R=(r_1,r_2,r_3)$

Se $\exists$ un piano π : $\pi \ni P$, $\pi \ni Q$, $\pi \ni R$

la sua giacitura W deve verificare:

$\vec{QP} \in W$, $\vec{QR} \in W$

Esercizio: siccome P, Q, R NON sono allineati, $\vec{QP}$ e $\vec{QR}$ sono LIN. IDIPENDENTI

Siccome $\dim W = 2$

$\Rightarrow W = \mathrm{Span}(\vec{QP}, \vec{QR})$

$\Rightarrow \pi$ $\exists$ ed è unico.

Eq. parametriche:

$$\begin{cases} x = q_1 + (p_1-q_1)\cdot t + (r_1-q_1)\cdot s \\ y = q_2 + (p_2-q_2)\cdot t + (r_2-q_2)\cdot s \\ z = q_3 + (p_3-q_3)\cdot t + (r_3-q_3)\cdot s \end{cases}$$

$$\vec{QP} = \begin{pmatrix} p_1-q_1 \\ p_2-q_2 \\ p_3-q_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{QR} = \begin{pmatrix} r_1-q_1 \\ r_2-q_2 \\ r_3-q_3 \end{pmatrix}$$

Eq. cartesiana:

$$\det \begin{pmatrix} p_1-q_1 & r_1-q_1 & x-q_1 \\ p_2-q_2 & r_2-q_2 & y-q_2 \\ p_3-q_3 & r_3-q_3 & z-q_3 \end{pmatrix} = 0$$

Altro modo:

il piano π ha eq. del tipo:

$ax+by+cz=d$

Impongo passaggio per P, Q, R:

$$\begin{cases} a p_1 + b p_2 + c p_3 - d = 0 \\ a q_1 + b q_2 + c q_3 - d \quad 0 \\ a r_1 + b r_2 + c r_3 - d \quad 0 \end{cases}$$

RETTE NELLO SPAZIO:

In $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, S retta affine

$\dim S = 1 = \dim W$

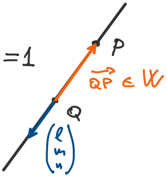
$Q = (q_1, q_2, q_3)$, $W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}\right)$

$$\begin{cases} x = q_1 + l t \\ y = q_2 + m t \\ z = q_3 + n t \end{cases}$$ eq. parametriche

Eq. cartesiane : $\mathrm{rg} \begin{pmatrix} l & x - q_1 \\ m & y - q_2 \\ n & z - q_3 \end{pmatrix} = 1$

$\overrightarrow{QP}$

3×2

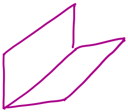

P
$\overrightarrow{QP} \in W$
Q
$\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$

Metto la matrice a scala

$\mathrm{rg} = 1 \iff$ 1 riga non nulla

$\iff 2^a$ e 3^a riga sono nulle

$\Rightarrow$ 2 equazioni cartesiane : retta come intersezione di 2 piani

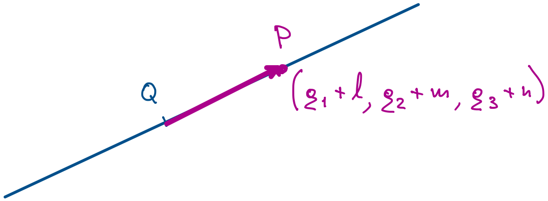


Oss.: Possiamo pensare a una retta data con equazioni parametriche come alla "traiettoria di una particella nello spazio":

$$\begin{cases} x = \xi_1 + lt \\ y = \xi_2 + mt \\ z = \xi_3 + nt \end{cases}$$

per $t=0$, la particella è nel punto $Q=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$

per $t=1$, la particella è nel punto finale P del vettore $\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$ applicato nel punto Q:



per $t=-1$, la particella è nel punto $(\xi_1 - l, \xi_2 - m, \xi_3 - n)$, cioè il punto finale del vettore $\begin{pmatrix} -l \\ -m \\ -n \end{pmatrix}$, opposto di $\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$, e applicato nel punto Q.

Al variare del tempo t, si trovano tutti i punti della retta.

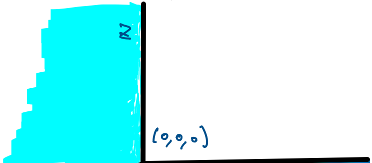
PASSAGGIO DA EQUAZIONI CARTESIANE A PARAMETRICHE:

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

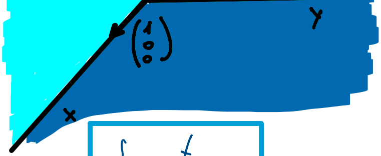
Risolvo il sistema e scrivo la gen. soluzione:

ad es. $y = t$, e scrivo x e z in funzione di t

Esempi:



ASSE x:



$$\begin{cases} x = 0 + 1\cdot t \\ y = 0 + 0\cdot t \\ z = 0 + 0\cdot t \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}}$$

EQUAZIONI PARAMETRICHE DELL'ASSE x

eq. cartesiane

$$rg\begin{pmatrix} 1 & x-0 \\ 0 & y-0 \\ 0 & z-0 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & x \\ \underline{0} & \underline{y} \\ \underline{0} & \underline{z} \end{pmatrix} = 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}} \begin{matrix} \rightsquigarrow \text{piano } xz \\ \rightsquigarrow \text{piano } xy \end{matrix}$$

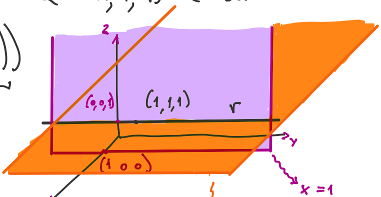
EQUAZIONI CARTESIANE DELL'ASSE x

Analog. asse y e asse z

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Esempio: retta $Q = (1, 1, 1)$ e con

$$W = \text{Span}\left(\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{e_2}\right)$$



$$\begin{cases} x = 1 + 0\cdot t \\ y = 1 + 1\cdot t \\ z = 1 + 0\cdot t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}$$

$$rg\begin{pmatrix} 0 & x-1 \\ 1 & y-1 \\ 0 & z-1 \end{pmatrix} = 1$$

$R_1 \leftrightarrow R_2$

$$rg\begin{pmatrix} 1 & y-1 \\ 0 & \overset{0=}{\boxed{x-1}} \\ 0 & \underset{=0}{\boxed{z-1}} \end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{cases} x-1=0 \\ z-1=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x=1 \\ z=1 \end{cases}$$

Esempio: $Q = (1,-1,2)$, $W = Span\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

$$rg\begin{pmatrix} 2 & x-1 \\ 2 & y+1 \\ 1 & z-2 \end{pmatrix} = 1$$

$$\xrightarrow[\substack{R_2-R_1 \\ R_3-\frac{1}{2}R_1}]{} \begin{pmatrix} 2 & x-1 \\ 0 & y+1-x+1 \\ 0 & z-2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & x-1 \\ 0 & y-x+2 \\ 0 & z-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$rg = 1 \iff \begin{cases} y-x+2=0 \\ z-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=0 \end{cases}$$

RETTA PER 2 PUNTI DISTINTI DELLO SPAZIO: $\exists!$

$P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$ con $P \neq Q$

Cerchiamo una retta r tale che $P \in r$ e $Q \in r$.

Per una tale retta deve valere che il vettore

$\overrightarrow{QP} \in W$, con W giacitura dir

Siccome $\dim W = 1 \Rightarrow W = Span(\overrightarrow{QP})$

Ricordiamo che si ha
$$\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} p_1 - q_1 \\ p_2 - q_2 \\ p_3 - q_3 \end{pmatrix}$$

Quindi: la retta è unica e delle equazioni parametriche sono date da:

$$\begin{cases} x = q_1 + (p_1 - q_1)\, t \\ y = q_2 + (p_2 - q_2)\, t \\ z = q_3 + (p_3 - q_3)\, t \end{cases}$$

Esempio: se $P = (1, 1, -1)$ e $Q = (-1, 2, 1)$, si ha

$$\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 1 - (-1) \\ 1 - 2 \\ -1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Retta per P e Q:

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -2 - 2t \end{cases}$$

Equazioni cartesiane: $\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 2 & x+1 \\ -1 & y-2 \\ -2 & z+2 \end{pmatrix} = 1$

Gradinizzo: $\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 2 & x+1 \\ 0 & y-2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \\ 0 & z+2+x+1 \end{pmatrix} = 1 \iff \begin{cases} y + \frac{1}{2}x = \frac{3}{2} \\ z + x = -3 \end{cases}$

POSIZIONI RECIPROCHE DI 2 rette in A^3_R:

r : giacitura W : $\dim W = 1$ $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$

r' : giacitura W' $\dim W' = 1$

$$\begin{cases} a''x + b''y + c''z = d'' \\ a'''x + b'''y + c'''z = d''' \end{cases}$$

2 casi : • $W = W'$: parallele (vere o finte)
$r \cap r' = \emptyset \qquad r = r'$

• $W \neq W'$

non sono parallele

es: $W : (*) \begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases}$ $\qquad W' : (**) \begin{cases} a''x + b''y + c''z = 0 \\ a'''x + b'''y + c'''z = 0 \end{cases}$

rg 2

sist. lineare omogeneo associato

ha necess. rango 2, perché i piani non possono essere paralleli

Supp. $r \parallel r'$: Il sistema $(*)$ e il sistema $(**)$ hanno lo stesso spazio W delle soluzioni, e $\dim W = 1 \Rightarrow$ il sistema omogeneo

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \\ a''x + b''y + c''z = 0 \\ a'''x + b'''y + c'''z = 0 \end{cases}$$

verifica $\underset{1}{\underset{\|}{\dim W}} = \underset{\dim \mathbb{R}^3}{\underset{\downarrow}{3}} - \text{rg}\, A \Rightarrow \text{rg}\, A = 2$

Quindi: $r \parallel r' \Leftrightarrow \text{rg}\, A = 2$

Per capire se $r \cap r' = \emptyset$ (parallele vere) oppure $r = r'$ (parallele fasulle) devo ora studiare il sistema lineare non omogeneo e il rango della matrice completa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{array}\right)$$

questa sottomatrice ha rango 2

$\Rightarrow$ aggiungendo una colonna, il rango può essere:

- rg = 2 : per Rouché - Capelli ho $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni
  $\Rightarrow$ le due rette coincidono

- rg = 3 : per Rouché - Capelli non ci sono soluzioni $\Rightarrow$ le due rette sono parallele

Consideriamo ora il caso di 2 rette

NON parallele:

quindi

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{pmatrix} = 3, \text{ e cons.}$$

$$\mathrm{rg}\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{matrix}}_{} & \begin{matrix} d \\ d' \\ d'' \\ d''' \end{matrix} \end{array}\right)$$

se $\mathrm{rg}(A|b) = 3 \Rightarrow$ per Cramer 1! soluzione

$\Rightarrow r \cap r' = \{P\}$ un unico punto

se $\mathrm{rg}(A|b) = 4 \Rightarrow$ per Rouché - Capelli non ci sono soluzioni

$\Rightarrow r$ e r' sono sghembe