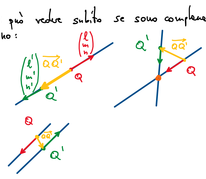
Posizione di 2 rette nello spazio:

$$r: \begin{cases} x = q_1 + lt \\ y = q_2 + mt \\ z = q_3 + nt \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x = q_1' + l't \\ y = q_2' + m't \\ z = q_3' + n't \end{cases}$$

Si può vedere subito se sono complanari o no:

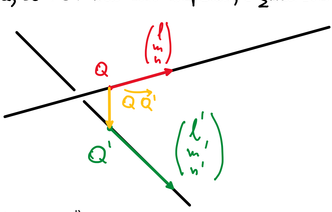


Osserviamo che in tutti i casi i vettori $\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} l' \\ m' \\ n' \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{QQ'}$ sono LINEARMENTE DIPENDENTI

Quindi:

$$\det \underbrace{\begin{pmatrix} l & l' & q_1' - q_1 \\ m & m' & q_2' - q_2 \\ n & n' & q_3' - q_3 \end{pmatrix}}_{(*)} = 0$$

Invece, se r e r' NON sono complanari, e quindi sono sghembe, si ha:



$\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} l' \\ m' \\ n' \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{QQ'}$ sono

LINEARMENTE INDIPENDENTI

Quindi: $\det (*) \neq 0$

Come conseguenza abbiamo il seguente:

CRITERIO DI COMPLANARITÀ: Due rette date in equazioni parametriche sono complanari $\iff$

$$\det \begin{pmatrix} l & l' & q_1' - q_1 \\ m & m' & q_2' - q_2 \\ n & n' & q_3' - q_3 \end{pmatrix} = 0$$

CRITERIO DI SGHEMBITÀ: Due rette date con equazioni parametriche sono sghembe $\iff$

$$\det \begin{pmatrix} l & l' & q_1' - q_1 \\ m & m' & q_2' - q_2 \\ n & n' & q_3' - q_3 \end{pmatrix} \neq 0$$

OSS: I 2 criteri vanno bene anche se $Q = Q'$.

FASCI DI PIANI

Consideriamo due piani H e H' di equazioni cartesiane.

$$H: ax + by + cz = d \qquad H': a'x + b'y + c'z = d'$$
$$ax + by + cz - d = 0 \qquad a'x + b'y + c'z - d' = 0$$

Fascio di piani generato da H e H':

$$\alpha(ax + by + cz - d) + \beta(a'x + b'y + c'z - d') = 0$$

al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, non entrambi nulli

OSS: se H e H' sono incidenti (si intersecano lungo una retta) $\Rightarrow$ tutti i piani del fascio contengono questa retta

Se H e H' sono paralleli $\Rightarrow$ tutti i piani sono $\parallel$ H

Infatti: se $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in H \cap H'$, le coordinate di tale punto annullano l'eq. di ogni piano del fascio

E se invece $H \parallel H' \Rightarrow$ $a' = k \cdot a$, $b' = k \cdot b$, $c' = k \cdot c$ per una opportuna costante k

$\Rightarrow$ il fascio può essere riscritto nella forma:

$$\alpha(ax + by + cz - d) + \beta(kax + kby + kcz - d') = 0$$

$$\underbrace{(\alpha + k\beta)}_{=:k'} a\,x + \underbrace{(\alpha + k\beta)}_{=:k'} \cdot b\,y + \underbrace{(\alpha + k\beta)}_{=:k'} \cdot c \cdot z - \alpha d - \beta d' = 0$$

Quindi l'equazione della giacitura del generico piano del fascio è:

$$k'ax + k'by + k'cz = 0$$

che è proporzionale a: $ax + by + cz = 0$ giacitura di H

$\Rightarrow$ ogni piano del fascio è $\parallel$ H.