Lezione. 20 novembre

mercoledì 20 novembre 2019 11:19

APPLICAZIONI LINEARI TRA SPAZI VETTORIALI

Idea: Una tipologia di funzioni $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ particolarmente semplici è data dalla proporzionalità diretta:

$$f(x) = a \cdot x, \qquad a \in \mathbb{R}$$

proprietà: $f(x+x') = a\cdot(x+x') = a x + a x' = f(x) + f(x')$

ADDITIVITÀ DI f

Inoltre:
$$f(c\cdot x) = a\cdot(c\cdot x) = a\cdot c\cdot x = \\ \doteq c\cdot(a x) = c\cdot f(x)$$

OMOGENEITÀ DI f

Esempi in dimensioni maggiori: la moltiplicazione per un fattore viene sostituita dalla moltiplicazione per una MATRICE; più precisamente:

cons. una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$; se $v \in \mathbb{R}^n$, posso

cons. $\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{v}$; il risultato è un vettore di $\mathbb{R}^m$.

Viene così determinata una funzione, che noi chiameremo APPLICAZIONE

$$L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad w = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \qquad w = L_A(v)$$

$$w = A\cdot v$$

Def: L_A si dice APPLICAZIONE ASSOCIATA AD A.

$$L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$L_A(v) = A\cdot v$$

$$w = A\cdot v$$

PROPRIETÀ DI L_A:
$$\begin{aligned} L_A(v+v') &= A\cdot(v+v') \\ &\Big| \text{ DISTRIB.} \\ &= A\cdot v + A\cdot v' \\ &= L_A(v) + L_A(v') \end{aligned}$$

$\Longrightarrow L_A$ è additiva

se $c\in\mathbb{R}$, $L_A(c\cdot v) = A\cdot(c\cdot v) = c\cdot(A\cdot v) = c\cdot L_A(v)$

$\Longrightarrow L_A$ è omogenea

Alla luce delle proprietà di queste semplici funzioni, generalizziamo al contesto delle funzioni tra spazi vettoriali arbitrari:

Def: Siano V e V' spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ (su $\mathbb{K}$)

Una funzione $f : V \longrightarrow V'$ si dice

APPLICAZIONE LINEARE o TRASFORMAZIONE LINEARE

AL1 f è additiva: $\forall\, v, u \in V$

$$f(v+u) = f(v) + f(u)$$

AL2 f è omogenea: $\forall\, c \in \mathbb{R}$ (opp. K) e $\forall\, v \in V$:

$$f(c \cdot v) = c \cdot f(v)$$

OSS.: ① $f(0_V) = f(\underset{\substack{\uparrow \\ 0 \in \mathbb{R} \\ v \in V}}{0 \cdot v}) \overset{\text{OMOGENEITÀ}}{=} 0 \cdot \underbrace{f(v)}_{\in V'} = 0_{V'}$

0_V : vettore nullo di V

$0_{V'}$: vettore nullo di V'

② Se $W \subseteq V$ sottospazio vettoriale

allora $f(W) \subseteq V'$ IMMAGINE DI W

$$f(W) = \{ v' \in V' \mid \text{t.c. } \exists\, \overset{\in W}{u} : f(u) = v' \}$$

è un SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI V'!

Infatti: siano $v', v'' \in f(W)$

Domanda: $v' + v'' \overset{?}{\in} f(W)$

$v' \in f(W)$, $\boxed{\exists\, u \in W}$ t.c. $f(u) = v'$

$v'' \in f(W)$, $\boxed{\exists\, w \in W}$ t.c. $f(w) = v''$

$$v' + v'' = f(u) + f(w) \underset{\text{ADDIT.}}{=} f(\underbrace{u+w}_{\in W}) = v''' \in f(W)$$

Sia ora:

$v' \in f(W)$, $c \in \mathbb{R}$: Domanda: $c \cdot v' \overset{?}{\in} f(W)$

$v' \in f(W) \Rightarrow v' = f(u)$ con $u \in W$

$$c \cdot v' = c \cdot f(u) \underset{\text{OMOGEN.}}{=} f(\underbrace{c \cdot u}_{\in W}) = \tilde{v} \in f(W)$$

$\in W$ perché W è sottospazio vettoriale

ok.

③ Se $v_1, .., v_k$ sono dei generatori per W

$W = \text{Span}(v_1, .., v_k)$ (in particolare se $\{v_1, .., v_k\}$ è una base di W)

$$\Rightarrow f(W) = \text{Span}(f(v_1), ..., f(v_k))$$

cioè $f(v_1), ..., f(v_k)$ sono dei generatori per $f(W)$

⚠ Se $\{v_1, \dots, v_k\}$ base di W $\not\Longrightarrow$ $\{f(v_1), \dots, f(v_k)\}$ base di $f(W)$

Dim: che $f(W) = \mathrm{Span}(f(v_1), \dots, f(v_k))$

Sia $\tilde{w} \in f(W)$ qualunque

$\tilde{w} = f(u)$ per $u \in W = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$

$\Rightarrow u = c_1 v_1 + \dots + c_k v_k$

$$\tilde{w} = f(c_1 v_1 + \dots + c_k v_k) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{addit.}}}{=} f(c_1 v_1) + \dots + f(c_k v_k) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{omog.}}}{=}$$

$$= c_1 \cdot f(v_1) + \dots + c_k f(v_k)$$

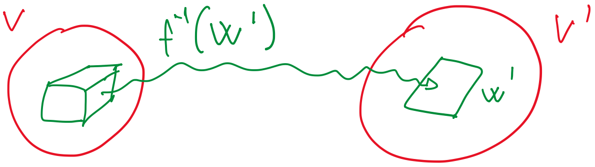
$\Rightarrow$ OGNI VETTORE DI $f(W)$ è COMBINAZIONE LINEARE DI $f(v_1), \dots, f(v_k)$

$\Rightarrow$ $f(W) = \mathrm{Span}(f(v_1), \dots, f(v_k))$

④ Sia $W' \subseteq V'$ un sottospazio vettoriale del codominio

Allora la CONTROIMMAGINE DI W' tramite f:

$$f^{-1}(W') = \{v \in V \mid f(v) \in W'\}$$



è un SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI V.

Dim: esercizio

CONSEGUENZE:

Def: Sia $f: V \to V'$ app. lineare

per ②, $f(V) \subseteq V'$ è sottospazio vettoriale di V'

che si chiama IMMAGINE DI f :

$$f(V) =: \mathrm{Im}\, f \subseteq V'$$

Inoltre: definiamo $\dim \mathrm{Im}\, f =:$ RANGO DI f

$=: \mathrm{rg}\, f$

Inoltre: $f^{-1}(\{0_{V'}\})$ è sottospazio di V per ④

$= \{v \in V : f(v) = 0_{V'}\}$

$f^{-1}(\{0_{V'}\}) =: \ker f$ NUCLEO D f

$\dim \ker f =$ NULLITÀ DI f

Esempio di APPLICAZIONE LINEARE :

PROIEZIONE SULLA PRIMA COMPONENTE

Consideriamo l'applicazione: $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$p\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x$$

Osservo che $p\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = p\left(\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}\right) = x + x' = p\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + p\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right)$ $\boxed{AL1}$ ✓

inoltre: $p\left(c \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = p\left(\begin{pmatrix} c \cdot x \\ c \cdot y \end{pmatrix}\right) = c \cdot x = c \cdot p\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ $\boxed{AL2}$ ✓

Per queste applicazione abbiamo:

$\mathrm{Im}\, p = \mathbb{R}$, quindi p è SURIETTIVA

Infatti: sia $x \in \mathbb{R}$ arbitrario; allora $x = p\left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, quindi ogni numero reale è proiezione di almeno un vettore di $\mathbb{R}^2$

Inoltre: $\ker p = p^{-1}(\{0\}) =$ retta vettoriale $= \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

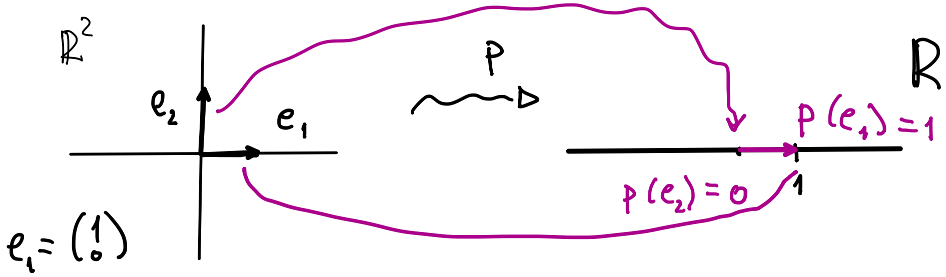
Infatti: $p\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 0 \in \mathbb{R} \iff x = 0$

quindi tutti i vettori che hanno per immagine 0 sono del tipo $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$, quindi tutti e soli i vettori del sottospazio $\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Abbiamo dunque:

$$\mathrm{rg}\, p = \dim \mathrm{Im}\, p = 1$$

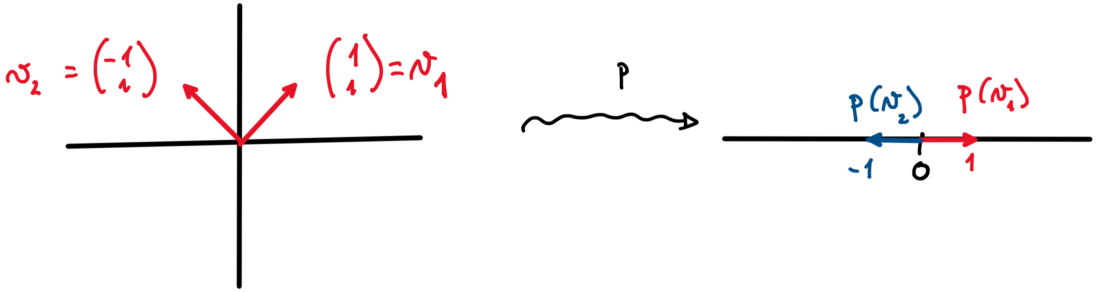
nullità : $\dim \ker p = 1$



$\{p(e_1), p(e_2)\} = \{1, 0\}$ sono generatori per $\mathbb{R}$

infatti: 1 è generatore per $\mathbb{R}$

Possiamo scegliere anche un'altra base di $\mathbb{R}^2$, ad esempio: $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$


$v_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = v_1$
p
$p(v_2)$
$p(v_1)$
-1
0
1

$\{p(v_1), p(v_2)\} = \underbrace{\{-1, 1\}}$

sono entrambi non nulli, però sono linearmente dipendenti perché proporzionali; in ogni caso formano un insieme di generatori di $\mathbb{R}$