Lezione 21 novembre

giovedì 21 novembre 2019 11:18

App. lineare $f: V \to V'$

Def: $f: V \to V$ $(V' = V)$ lineare si dice **OPERATORE LINEARE**

Esempi:

- $f: V \to V'$, f app. costante

  cioè $f(v)$ è un vettore costante

  è lineare $\iff f(v) = 0_{V'}$ vettore nullo di V'

  f si dice **APPLICAZIONE NULLA.**

- IDENTITÀ: $Id_V : V \to V$

  $$Id_V(v) = v$$

  è lineare

- FUNZIONE COORDINATE: $F_{\mathcal{B}}$

  V sp. vettoriale, fisso base $\mathcal{B} = \{v_1, .., v_n\}$

  $$F_{\mathcal{B}} : V \to K^n$$

  $F_{\mathcal{B}}(v)$ = n-ple delle coordinate

  es. V = spazio dei vettori liberi

  base $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$

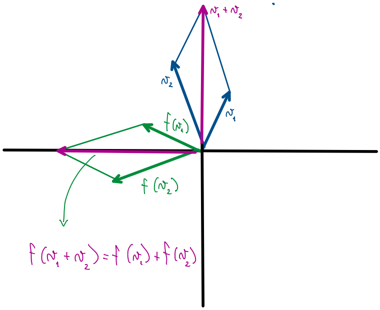
  abbiamo visto:

  $$\vec{v} + \vec{w} \rightsquigarrow F_{\mathcal{B}}(\vec{v} + \overrightarrow{\ }) = F_{\mathcal{B}}(\vec{v}) + F_{\mathcal{B}}(\vec{w})$$

  $$c \cdot \vec{v} \rightsquigarrow F_{\mathcal{B}}(c \cdot \vec{v}) = c \cdot F_{\mathcal{B}}(\vec{v})$$

  $F_{\mathcal{B}}$ è lineare

- ROTAZIONI DEL PIANO



Consideriamo una rotazione antioraria del piano $\mathbb{R}^2$ di un angolo $\alpha>0$ attorno all'origine $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

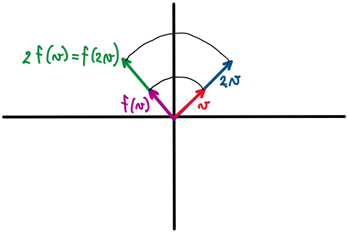
ad esempio sia $\alpha = \frac{\pi}{2}$

Ruotare v_1+v_2 di angolo α $\iff$ sommare ruotato di v_1
e ruotato di v_2

$\Updownarrow$

additività della rotazione

Omogeneità della rotazione:



Espressione esplicita di una rotazione di angolo α

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}x\cos\alpha - y\sin\alpha\\ x\sin\alpha + y\cos\alpha\end{pmatrix}$$

OSS.: La rotazione f è di fatto una moltiplicazione per una matrice, e precisamente

$$f\left(\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},$$

quindi è lineare.

Es: $V = C^1((a,b),\mathbb{R})$

cons. l'applicazione DERIVAZIONE:

$$D: C^1((a,b),\mathbb{R}) \longrightarrow C^0((a,b),\mathbb{R})$$

$$D(f) = f'$$

è app. LINEARE: $D(f+g) = D(f) + D(g)$, cioè $(f+g)' = f' + g'$

$D(c\cdot f) = c\cdot D(f)$, cioè $(c\cdot f)' = c\cdot f'$

- Integrazione

$$I: C^0((a,b),\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ è lineare

Domanda: come controllare se $f: V \longrightarrow V'$ lineare è iniettiva?

RICHIAMO: f è INIETTIVA $\iff$ $f(v_1) = f(v_2)$

$$\Updownarrow$$

$$v_1 = v_2$$

PROP.: $f: V \to V'$ lineare è iniettiva

$\iff \ker f = \{0_V\}$.

Dim: Se f è iniettiva, c'è un unico vettore che ha per immagine $0_{V'}$

Ma: sappiamo che $\forall f$ lineare, vale

$$f(0_V) = 0_{V'}$$

$\Rightarrow$ non esiste nessun altro vettore $v : f(v) = 0_{V'}$

$\Rightarrow \ker f = \{0_V\}$

Viceversa: Supp. $\ker f = \{0_V\}$

Voglio dimostrare f iniettiva:

supp. $f(v_1) = f(v_2)$; quindi

$$f(v_1) - f(v_2) = 0_{V'}$$

siccome f è lineare $=$

$$f(v_1 - v_2) = 0_{V'}$$

$$\Rightarrow v_1 - v_2 \in \ker f = \{0_V\}$$

$$\Rightarrow v_1 - v_2 = 0_V \Rightarrow v_1 = v_2$$

* * *

IL TEOREMA DI DIMENSIONE:

Teorema: $f: V \to V'$, $\dim V$ finita

app. lineare

$$\Longrightarrow \boxed{\dim V = \dim \ker f + \operatorname{rg} f}$$

Ricordo: $\operatorname{rg} f := \dim \operatorname{Im} f$, $\operatorname{Im} f \subseteq V'$

Prima di vedere la dimostrazione, ci chiediamo se ci sia un legame tra le nozioni di rg f e rg A.

Oss.: Cons. $f = L_A$, $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

$$L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$L_A(v) = A \cdot v$$

$$\operatorname{rg} L_A = ?$$

per definizione $= \dim \operatorname{Im} L_A$

Sappiamo che se $\{v_1, \dots, v_n\}$ base di $\mathbb{R}^n$

$\Longrightarrow \{L_A(v_1), \dots, L_A(v_n)\}$ è un insieme di generatori per $\operatorname{Im} L_A$

In particolare scelgo $\mathcal{B} = \mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Osservo che: $L_A(e_1) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A^{(1)}$ prima colonna

$L_A(e_2) = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A^{(2)}$ seconda colonna

$\vdots$

$L_A(e_n) = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A^{(n)}$ ultima colonna

$$\mathrm{Im}\, L_A = \mathrm{Span}\left(L_A(e_1), \dots, L_A(e_n)\right) = \mathrm{Span}\left(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\right)$$

$$\boxed{\mathrm{rg}\, L_A} = \dim \mathrm{Im}\, L_A = \dim \mathrm{Span}\left(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\right) = \boxed{\mathrm{rg}\, A}$$

oss: Ricordo che se $\tilde{A}$ è ottenuta da A con OE1, OE2, OE3 $\Rightarrow \mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, \tilde{A}$

$$\Rightarrow \mathrm{rg}\, L_A = \mathrm{rg}\, L_{\tilde{A}}$$

⚠ In generale, $\mathrm{Im}\, L_A \neq \mathrm{Im}\, L_{\tilde{A}}$
come sottospazi vettoriali.

DIM. del $\underbrace{\text{Teorema di Dimensione}}$

alcuni testi: Teorema di NULLITÀ + RANGO

$$\dim V = \underset{\text{NULLITÀ}}{\dim \ker f} + \mathrm{rg}\, f$$

Dim.

$$\begin{tikzcd} f: \boxed{V} \arrow[r] & V' \\ \boxed{\ker f} \arrow[u, phantom, sloped, "\subseteq"] & \boxed{\mathrm{Im}\, f} \arrow[u, phantom, sloped, "\subseteq"] \end{tikzcd}$$

$\ker f \subseteq V$ è SOTTOSP. VETT.

Fisso base di $\ker f$: $\{v_1, \dots, v_k\}$

la estendo a una base di V:

$$\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$$

So che $\mathrm{Im} f = \mathrm{Span}\big(\underset{=0_{V'}}{f(v_1)}, \dots, \underset{=0_{V'}}{f(v_k)}, \underbrace{f(v_{k+1}), \dots f(v_n)}_{n-k \text{ vettori}}\big)$

$$= \mathrm{Span}\big(f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)\big)$$

Se dimostro che $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$ sono linearmente indipendenti, avrò che formano una base di $\mathrm{Im} f$

e quindi: $\dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f = k + n - k = n$

$$= \dim V$$

Quindi: cons.

$$\underbrace{c_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + c_n f(v_n)}_{\|} = 0_{V'}$$

f lineare

$$f(c_{k+1} v_{k+1} + \dots + c_n v_n) = 0_{V'}$$

$$\Rightarrow c_{k+1} v_{k+1} + \dots + c_n v_n \in \ker f$$

base $\{v_1, \dots, v_k\}$

$\Rightarrow \exists\, a_1, \dots, a_k$ scalari t.c.

$$c_{k+1} v_{k+1} + \dots + c_n v_n = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k$$

$$a_1 v_1 + \dots + a_k v_k - c_{k+1} v_{k+1} - \dots - c_n v_n = 0_V$$

$\{v_1, \dots, v_n\}$ base di V

$$\Rightarrow \quad a_1 = \dots = a_k = c_{k+1} = \dots = c_n = 0.$$

$\Rightarrow$ $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$ sono LIN. INDIP.

COROLLARIO: $A \in M_{m,n}(K)$

sia W spazio delle soluzioni di $A \cdot X = 0$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{n}_{\text{numero di colonne}} = \dim W + \operatorname{rg} A$$

Dim: Cons. $L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$$v \longrightarrow A \cdot v$$

Applico Teo di Dim. a L_A:

$$\begin{array}{ccccc} \dim \mathbb{R}^n &=& \dim \ker L_A &+& \operatorname{rg} L_A \\ \| && \| && \| \\ n &=& \dim W &+& \operatorname{rg} A \end{array}$$

infatti: $\ker L_A = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid \underset{A \cdot v}{\underset{\|}{L_A}}(v) = 0_{\mathbb{R}^m} \}$

$$\overset{!}{=} \{ v \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot v = \ \} = W$$