Lezione 22 novembre

venerdì 22 novembre 2019 11:25

Teorema di dimensione: $f: V \to V'$ AL

allora $\dim V = \dim \ker f + \operatorname{rg} f$

COROLLARIO: Supp. $\dim V = \dim V'$

Allora sono equivalenti:

① $\ker f = \{0_V\}$, cioè f iniettiva

$\Updownarrow$

② $\operatorname{Im} f = V'$, cioè f è suriettiva

$\Updownarrow$ per definizione

③ f è biiettiva

Dim.: ① Supp. f iniettiva: $\Leftarrow \ker f = \{0_V\}$

$\Rightarrow$ Formula di Dimensione

$$\underline{\dim V} = \boxed{\dim \ker f} + \underline{\dim \operatorname{Im} f}$$

$\dim \ker f = 0$

$\Rightarrow \quad \dim V = \dim \operatorname{Im} f$

$(= \dim V'$

$\operatorname{Im} f \subseteq V'$ sottosp. vett.

$\Rightarrow \quad \operatorname{Im} f = V' \Longleftrightarrow$ f è suriettiva

$\Rightarrow$ f biiettiva.

Supp. ②

Def: $f: V \longrightarrow V'$ AL e biiettiva si chiama ISOMORFISMO.

Se 2 spazi V e V' ammettono un isomorfismo $f: V \to V'$, V e V' si dicono ISOMORFI e scriveremo

$$V \cong V'$$

simbolo di ISOMORFISMO.

Parentesi: vedremo ora che una AL tra spazi vett. di dim. finita è determinata da un numero finito di suoi valori.

TEOREMA DI STRUTTURA:

Sia $f: V \longrightarrow V'$ AL e supp. che $\dim V = n < \infty$. Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ base di V.

Allora f è UNIVOCAMENTE determinata dai valori, cioè dai vettori:

$$f(v_1), \dots, f(v_n) \in V'.$$

Dim.: f è determinata da $f(v_1), \dots, f(v_n)$:

Sia $v \in V$; $\{v_1, \dots, v_n\}$

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$$

$$f(v) = f(c_1 v_1 + \dots + c_n v_n) \overset{AL}{=} c_1 \underline{f(v_1)} + \dots + c_n \underline{f(v_n)}$$

⇒ se conosco $f(v_1), \dots, f(v_n)$, posso calcolare $f(v)$ $\forall\, v \in V$

UNIVOCAMENTE: poniamo

$$\begin{aligned} w_1 &= f(v_1) \in V' \\ &\vdots \\ w_n &= f(v_n) \in V' \end{aligned}$$

Supp. che $g: V \to V'$ sia AL tale che

$$\begin{aligned} g(v_1) &= w_1 \in V' \\ &\vdots \\ g(v_n) &= w_n \in V' \end{aligned}$$

Se $v \in V$ vettore qualunque, $v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$

$$\begin{aligned} \boxed{g(v)} = g(c_1 v_1 + \dots + c_n v_n) &\underset{AL}{=} c_1 g(v_1) + \dots + c_n g(v_n) \\ &= c_1 w_1 + \dots + c_n w_n \\ &= c_1 f(v_1) + \dots + c_n f(v_n) \\ &\overset{AL}{=} f(c_1 v_1 + \dots + c_n v_n) \\ &= \boxed{f(v)} \end{aligned}$$

uguaglianza di applicazioni

$$\Rightarrow \quad f \equiv g$$

TEOREMA DI ESISTENZA DI AL:

Supp. $\dim V = n$, $\{v_1, \dots, v_n\}$ base di V

Fissiamo a piacere n vettori di V':

$w_1, \dots, w_n \in V'$ (non necess. distinti, non nec. non nulli)

$\Longrightarrow$ $\exists$ $f: V \longrightarrow V'$ AL t.c.
$f(v_1) = w_1, \quad \dots, \quad f(v_n) = w_n$

Dim.: Sia $v \in V$;

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$$

pongo: $f(v) := c_1 w_1 + \dots + c_n w_n$

si verifica che f è lineare

e si ha $f(v_1) \overset{!}{=} 1 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + \dots + 0 \cdot w_n = w_1$

$v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n$

$\vdots$

$v_n = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 1 \cdot v_n$

$$f(v_n) = 0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + \dots + 1 \cdot w_n = w_n$$

CONSEGUENZA:

- In particolare: se fisso $w_1 = 0_{V'}, \dots, w_n = 0_{V'}$

$$\exists\, f \text{ AL}: \quad \begin{aligned} f(v_1) &= 0_{V'} \\ &\vdots \\ f(v_n) &= 0_{V'} \end{aligned}$$

è unica; oss. che la funzione costante NULLA $f(v) = 0 \quad \forall\, v \in V$ ha queste proprietà; per unicità $\Rightarrow$ solo lei

- La AL: $\mathrm{Id}_V : V \to V$, $v \to v$

  è l'unica AL t.c. $f(v_1) = v_1$, $\vdots$, $f(v_n) = v_n$

Teorema: Due spazi V e V' sono ISOMORFI

$$V \cong V' \iff \dim V = \dim V'.$$

Dim. Se $V \cong V' \Rightarrow$ c'è un isomorfismo

$$f : V \to V'$$

$$\operatorname{Im} f = V'$$

$$\dim \operatorname{Im} f = \boxed{\dim V'}$$

$$\Big(\underset{\text{T. di Dimensione}}{=} \dim V - \underbrace{\dim \ker f}_{=0} \quad \boxed{= \dim V}$$

Viceversa: Supp. $\dim V = \dim V'$

Fisso base $\{v_1, .., v_n\}$ di V, e fisso $\{w_1, \dots, w_n\}$ base di V'

Per il Teo. di esistenza, $\exists!$

$$f : V \longrightarrow V'$$

$$f(v_1) = w_1$$

$$\vdots$$

$$f(v_n) = w_n$$

Dico che f è isomorfismo:

so che $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Span}\,(f(v_1), \dots, f(v_n))$

$$= \mathrm{Span}\,(\underbrace{w_1, \dots, w_n}_{\text{base di } V'}) = V'$$

$\mathrm{Im}\, f = V' \Longrightarrow f$ suriettiva $\Longrightarrow f$ biiettiva isomorfismo

IN PARTICOLARE:

$$\mathbb{R}^n \cancel{\cong} \mathbb{R}^m$$

$\dim \mathbb{R}^n = n$ $\quad$ $\dim \mathbb{R}^m = m$

se $n \neq m$

in generale: $\mathbb{K}^n \cancel{\cong} \mathbb{K}^m$ se $n \neq m$

MATRICE DI UNA AL :

$$\dim V = n, \qquad \dim V' = m$$

$$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\} \text{ base di } V \qquad \underbrace{\{v'_1, \dots, v'_m\}}_{} = \mathcal{C} \text{ base di } V'$$

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$$

$$f(v) = c_1 \underbrace{f(v_1)}_{\in V'} + \dots + c_n \underbrace{f(v_n)}_{\in V'}$$

se $V' \ni f(v_1) = a_{11} v'_1 + \dots + a_{m1} v'_m$

$\vdots$

$V' \ni f(v_n) = a_{1n} v'_1 + \dots + a_{mn} v'_m$

il vettore $f(v)$ ha coordinate (nelle base $\{v'_1, \dots, v'_m\}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \underbrace{a_{m1}}_{f(v_1)} & \dots & \underbrace{a_{mn}}_{f(v_n)} \end{pmatrix}}_{m \times n} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}}_{n \times 1} = \underbrace{\text{vettore delle coordinate di } f(v)}_{m \times 1}$$

$$= c_1 \cdot A^{(1)} + \dots + c_n A^{(n)}$$

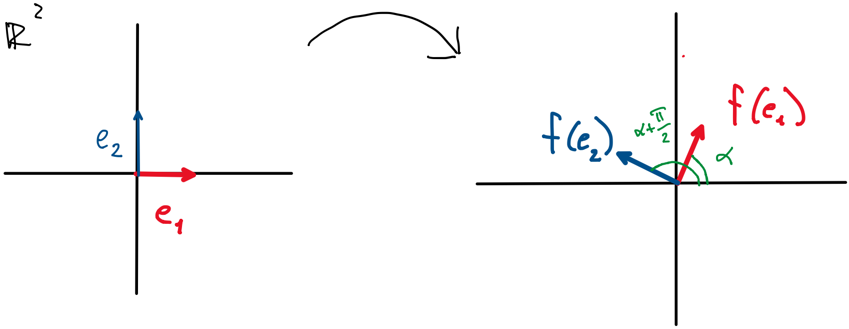
$$A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)$$

è LA MATRICE DI f nelle basi $\mathcal{B}$ di V

e $\mathcal{C}$ di V'

Oss. Vedremo che se cambiamo basi, la stessa f può aver matrici diverse.

Esempio: Rotazione in $\mathbb{R}^2$ di un angolo $\alpha > 0$.



Per il Teorema di Struttura per AL, f è completamente determinata dai suoi valori nei vettori di una base.

Scegliamo la base $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ e calcoliamo i valori $f(e_1)$ e $f(e_2)$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\pi/2) \\ \sin(\alpha+\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Infatti: $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos\alpha \cdot \cos\pi/2 - \sin\alpha \cdot \sin\pi/2$

$$= \cos\alpha \cdot 0 - \sin\alpha \cdot 1$$

$$\sin\left(\alpha + \pi/2\right) = \sin\alpha \cdot \underbrace{\cos \pi/2}_{=0} + \cos\alpha \cdot \underbrace{\sin \pi/2}_{=1}$$

$$= \cos\alpha$$

Quindi: $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ MATRICE DI UNA ROTAZIONE