

Esercizi Algebra 1

Esercizio 1 Dimostrare che le seguenti relazioni sono relazioni d'equivalenza, determinare le classi d'equivalenza e l'insieme quoziente.

- $X = \{\text{rette in } \mathbb{R}^3\}$ con la relazione

$$x \sim y \iff x \parallel y$$

ovvero due rette $x, y \in X$ sono in relazione se e solo se sono rette fra loro parallele,

- Consideriamo $\mathbb{C} = \{z = a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ l'insieme dei numeri complessi. Definiamo il modulo di z come il numero reale non negativo dato da

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Definiamo su \mathbb{C} la seguente relazione: per ogni $z, z' \in \mathbb{C}$

$$z \sim z' \iff |z| = |z'|$$

- Sia A insieme qualunque. Definiamo la relazione d'uguaglianza $=$ su A :

$$a \sim b \iff a = b$$

Esercizio 2 Considera l'insieme $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ e la seguente relazione d'equivalenza: per ogni $m, n \in X$

$$m \sim n \iff m - n \text{ \u00e9 un multiplo di } 4$$

Chi \u00e9 X/\sim ? Quanti elementi ha? Scrivere le classi d'equivalenza.

Esercizio 3 Considera la seguente relazione d'equivalenza su \mathbb{Z} : per ogni $m, n \in \mathbb{Z}$

$$m \sim n \iff n - m \text{ \u00e9 un multiplo di } 5$$

Chi \u00e9 \mathbb{Z}/\sim ? Quanti elementi ha? Scrivere le classi d'equivalenza.

Esercizio 4 Sia X un insieme e $A \subset X$. Definiamo la seguente relazione: per ogni $x, y \in X$

$$x \sim y \iff x = y \vee x, y \in A$$

Dimostrare che \u00e9 una relazione d'equivalenza e descriverne le classi d'equivalenza.