Esercizi sulle Applicazioni Lineari
Ingegneria Industriale e Navale 2019/2020 - nono foglio

November 24, 2019

1. Si verifichi che l'applicazione

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ x \end{pmatrix}$$

   è un'applicazione lineare. Si determini, inoltre, $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$ e le loro dimensioni.
   Si scriva la matrice $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'}(f)$ associata ad f nelle basi canoniche $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{E}'$ di $\mathbb{R}^3$.

2. Si dia una descrizione geometrica di ciascuna delle applicazioni lineari rappresentate dalla moltiplicazione per le seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Si calcoli poi il quadrato di ciascuna matrice. Come si spiega geometricamente il risultato?

3. Si consideri l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Si scriva la matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ associata ad f nelle seguenti basi di $\mathbb{R}^2$:

   - $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
   - $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
   - $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

4. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'unica applicazione lineare che soddisfi:

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si scriva il valore di f nel generico vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$.

Si determinino, inoltre, $\ker f$ e una sua base e $\mathrm{Im} f$ e una sua base.

5. Si dica, motivando la risposta, se può esistere un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che assuma i seguenti valori:

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

6. Si trovi un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$\ker f = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

e tale che

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Si scriva la matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ nella base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$.

7. Si consideri l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y+z \\ 2x+z \end{pmatrix}.$$

- Si determini l'immagine $f(W)$ tramite f del sottospazio

$$W \subseteq \mathbb{R}^3, \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | 2y - z = 0 \right\}.$$

- Si determini la controimmagine $f^{-1}(r')$ della retta vettoriale

$$r' \subseteq \mathbb{R}^3, \quad r' = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | x + y = 0, y - z = 0 \right\}.$$

8. Si scriva il valore di un vettore generico per una riflessione del piano $\mathbb{R}^2$ rispetto alla retta affine di equazione $x = 1$. Si dica se tale applicazione è lineare o no.

9. Si scriva il valore di un vettore generico per una traslazione nel piano $\mathbb{R}^2$ determinata dal vettore $v_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$:

$$f(v) = v + v_0.$$

Si dica se tale applicazione è lineare o no.

10. Sia $v_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ un vettore fissato. Si consideri l'applicazione *prodotto scalare per* v_0:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(v) = v \cdot v_0 = x\, x_0 + y\, y_0.$$

Si dimostri che f è un'applicazione lineare.

Si dica se f è iniettiva, e in caso contrario si determini il suo nucleo e se ne dia un'interpretazione geometrica.

11. Sia $f : V \to V'$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita.

Sia $\{v_1, \ldots, v_k\}$ una base di $\ker f$, e sia $\mathcal{B} := \{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ un completamento a una base di V.

Sappiamo dal Teorema di Dimensione che $\{f(v_{k+1}, \ldots, f(v_n)\}$ è una base di $\mathrm{Im}(f)$; completiamo tale insieme a una base di V' con dei vettori $w_1, \ldots, w_s$. Poniamo $\mathcal{C} := \{w_1, \ldots, w_s, f(v_{k+1}, \ldots, f(v_n)\}$.

Si dimostri che con queste scelte la matrice di f si può scrivere a blocchi

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{n-k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

dove $\mathbb{I}_{n-k}$ è la matrice unità $(n-k) \times (n-k)$ e gli zeri $\mathbf{0}$ rappresentano delle matrici nulle.

12. Sia

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e sia $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare associata. Si determinino delle basi $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^2$ tali che si abbia

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(L_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

13. Sia $f : V \to W$ una applicazione lineare biiettiva (un isomorfismo). Si dimostri che allora anche la funzione inversa

$$f^{-1} : W \to V$$

un'applicazione lineare.

14. Si consideri lo spazio dei numeri complessi $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale di dimensione 1 su $\mathbb{C}$. Si dimostri che la funzione

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \overline{z},$$

dove $\overline{z}$ il coniugato di z, una funzione additiva (verifica (AL1)), ma non omogenea (non verifica (AL2)).

15. Si consideri la funzione

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}.$$

Si dimostri che f è omogenea (verifica (AL2)), ma non additiva (non verifica (AL1)).

16. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare. Per ogni $w \in \mathrm{im}(f)$, consideriamo la preimmagine di w tramite f:

$$f^{-1}(w) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid f(v) = w\}.$$

Si dimostri che $f^{-1}(w)$ può essere identificato con un sottospazio affine di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$.

Si determinino tali sottospazi affini nel caso della proiezione

$$p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad p_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}.$$