Esercizi per casa:

1) (i) Dimostrare che $\forall f \in L^2$, la funzione ottenuta applicando l'inversione: $I[f](t) = \frac{1}{t} f(\frac{1}{t})$ è anch'essa in L^2, e $\|f\|_2^2 = \|I[f]\|_2^2$;

(ii) Usare questo per dimostrare la seguente identità:

$$\int_0^{+\infty} dx \left[(E_i(-x))^2 - \frac{(1-e^{-x})^2}{x^2} \right] = 0$$

[Suggerimento: ricordare che abbiamo visto che

$$\widehat{\frac{1}{t}\operatorname{atan}(t)}(\omega) = -\pi E_i(-|\omega|), \quad \widehat{\operatorname{atan}(\tfrac{1}{t})}(\omega) = \frac{i\pi}{\omega}\left(1 - e^{-|\omega|}\right)$$]

2) Dimostrare che se $h \in L^1$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, h(x) \neq 0$ allora

$$u_n(x) := \frac{n\, h(nx)}{\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, h(x)} \xrightarrow[n \to \infty]{} \delta_0 = \delta(x)$$

come distribuzione.
