Lezione 25 novembre 2019

lunedì 25 novembre 2019 11:41

$f: V \longrightarrow V'$

$\mathcal{B}$ base di V $\quad$ $\mathcal{C}$ base di V'

$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$, $\mathcal{C} = \{v_1', \dots, v_m'\}$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{array}{cccc} \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \\ \bullet \end{array}\right. & & \left.\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \\ \\ \end{array}\right) & \begin{array}{c} v_1' \\ \vdots \\ v_m' \end{array} \\ \underbrace{\quad}_{f(v_1)} & \cdots & \underbrace{\quad}_{f(v_n)} & \end{array}$$

coordinate di $f(v_1)$ rispetto a

$v_1', \dots, v_m'$

oss.: Abbiamo visto: $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

$L_A: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$

$v = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \longrightarrow L_A(v) = A \cdot v$

Cons. in $\mathbb{K}^n$ base canonica $\mathcal{E}$

in $\mathbb{K}^m$ base canonica $\mathcal{E}'$

$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'}(L_A) = A$

infatti: in $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'}(L_A)$, le colonne sono le coordinate delle immagini

$L_A(e_1), \dots, L_A(e_n)$

$L_A(e_1) = A \cdot e_1 = A^{(1)}$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$L_A(e_n) = A \cdot e_n = A^{(n)}$

oss. che le coordinate di $A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ nella base canonica $\mathcal{E}'$ di $\mathbb{K}^m$ COINCIDONO con le componenti di $A^{(1)}$

$$\Longrightarrow \quad M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'}(L_A) = \left(A^{(1)} \cdots A^{(n)} \right) = A$$

cioè le colonne di $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'}(L_A)$ e le colonne di A coincidono

Ricordiamo: se $v \in V$ vettore qualunque

e v ha coordinate $c_1, \dots, c_n$ nella base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$, le coordinate di $f(v) \in V'$ nella base

$\mathcal{e} = \{v_1', \dots, v_m'\}$ sono date:

$$M^{\mathcal{B}}_{e}(f) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \text{ cioè}$$

$$f(v) = b_1 v_1' + \dots + b_m v_m'$$

COR.: Sia $M = M^{\mathcal{B}}_{e}(f)$

Allora: $\ker f = \{ v \in V$: le coordinate di v sono UNA SOLUZIONE $M \cdot X = 0 \}$

$(\ker f = \{ v \mid f(v) = 0 \})$

inoltre:

$\mathrm{Im}\, f = \{ v' \in V'$: le coordinate di v' $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ sono tali che il sist. lineare $M \cdot X = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ è COMPATIBILE $\}$

STRUTTURA DI SP. VETT. per AL:

Def.: $\mathcal{L}(V, V') = \{$ applicazioni lineari $f : V \to V' \}$

(opp. $\mathrm{Hom}(V, V')$)
"homomorphisms"

possiamo definire $+$: $f + g$: $(f+g)(v) := f(v) + g(v)$

molt. per scalare $c \cdot f$: $(c \cdot f)(v) := c \cdot f(v)$

$c \in \mathbb{K}$

così $\mathcal{L}(V, V')$ diventa SPAZIO VETTORIALE su $\mathbb{K}$.

Elemento neutro: (vettore nullo) : $f \equiv 0$

è l'applicazione NULLA $(f(v) = 0_{V'} \quad \forall v \in V)$

TEOREMA: Siano V con base $\mathcal{B}$
e V' con base $\mathcal{C}$
Allora la funzione:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} : \mathcal{L}(V, V') \longrightarrow M_{m,n}(K)$$

$$f \longrightarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)$$

è un ISOMORFISMO DI SPAZI VETTORIALI

in particolare: $\dim \mathcal{L}(V, V') = \dim M_{m,n}(K)$
$= m \cdot n$

Richiamo: Una base per $M_{m,n}(K)$ è data dalle matrici:

$\{E_{ij}\}_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ con $E_{i,j}$: matrice con entrata 1 al posto ij
entrate 0 altrove

COMPOSIZIONE DI AL:

Teorema: Siano

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[rrr, bend left, "g \circ f"] & V' , & V' \arrow[r, "g"] & V'' \\
\mathcal{B} & \mathcal{C} & \mathcal{C} & \mathcal{D}
\end{tikzcd}$$

posso consid. $(g \circ f)(v) = g(f(v))$

Allora:

$$M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(g\circ f) = M_{\mathcal{D}}^{\cancel{\mathcal{C}}}(g)\cdot M_{\cancel{\mathcal{C}}}^{\mathcal{B}}(f)$$

$$\downarrow$$

riga per colonna

COROLLARIO: $f: \underset{\mathcal{B}}{V} \longrightarrow \underset{\mathcal{B}}{V}$ OPERATORE (AL da V in V)

Allora: f è ISOMORFISMO $\Longleftrightarrow M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ è invertibile

In particolare:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)\right)^{-1}$$

DIM. Supp. f isomorfismo, $\exists\, f^{-1}$

$$f\circ f^{-1} = Id_V$$

$$f^{-1}\circ f = Id_V$$

$$\Longrightarrow \boxed{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f\circ f^{-1})} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(Id_V) = I_n$$

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(Id_V) = \left(\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & & 0 \\ \underbrace{0} & \vdots\ 0 & & \underbrace{1} \end{matrix}\right)\begin{array}{c} v_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n \end{array} = I_n$$

$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ $\quad Id_V(v_1) = v_1$

$$= M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)\cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f^{-1}) = I_n$$

analog. $\quad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f^{-1})\cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = I_n$

quindi, per definizione, $M^{B}_{B}(f)$ è invertibile

e la sua inversa è $\left(M^{B}_{B}(f)\right)^{-1} = M^{B}_{B}(f^{-1})$

Viceversa: Supp. $\underset{= M}{M^{B}_{B}(f)}$ invertibile

$\ker f$: è dato dai vettori le cui coordinate

sono soluzioni di $\underbrace{M}_{n \times n} \cdot X = 0$

siccome M invertibile $\underset{\text{Cramer}}{\Longrightarrow}$ $\exists !$ soluzione, quella

tutte nulle

$\Longrightarrow \ker f = \{0_V\} \Longrightarrow f$ è iniettiva

$f : V \to V$

operatore

$\Longrightarrow f$ è anche suriettiva $\Longrightarrow f$ ISOMORF.

COROLLARIO: $A \in M_n(\mathbb{K})$ è invertibile

$\Longleftrightarrow \operatorname{rg} A = n.$

Dim.: $L_A : \underset{\mathcal{E}}{\mathbb{K}^n} \longrightarrow \underset{\mathcal{E}}{\mathbb{K}^n}$, $A = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(L_A)$

base canonica

$A = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(L_A)$ è invertibile $\Longleftrightarrow L_A$ è ISOMORFISMO

$\Longleftrightarrow L_A$ è suriettiva $\Longleftrightarrow \dim \operatorname{Im} L_A = n$

$= (\operatorname{rg} L_A = \operatorname{rg} A$